ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 gennaio 1918.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani.* II: *Condizioni di integrabilità e comportamento geometrico spaziale.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Lo scopo principale delle presenti ricerche, già dichiarato nella Nota I, è l'integrazione delle equazioni della statica einsteiniana negli spazi vuoti (più precisamente, a tensore energetico nullo). A dire il vero, i risultati che ho finora raggiunti non mi consentono di attribuire alla parola integrazione la sua accezione completa di costruzione dell'integrale generale, ma quella più modesta di determinazione di alcune notevoli categorie di soluzioni. Riservandomi di indicare a suo tempo i criteri di semplicità analitica e di interpretazione meccanica, che portano a queste soluzioni, dovrò intrattenermi ancora un po' (e non soltanto in questa seconda Nota) su considerazioni preparatorie.

Qui mi valgo della geometria intrinseca come strumento di calcolo per dedurre ed illustrare le condizioni di integrabilità. Col procedimento adottato, esse si raggruppano tre a tre [cfr. n. 4]. Un gruppo involge soltanto le differenze delle curvature e le anormalità delle congruenze principali, e porta [n. 5] ad una razionale classificazione delle soluzioni *a priori* possibili in due grandi tipi A) e B), dei quali il secondo offre assai più del primo prospettiva di successo a chi si accinga alla integrazione effettiva. Tale secondo tipo presenta a sua volta tre sottocasi [n. 6] con caratteristiche geometriche nettamente distinte.

L'ultimo sottocaso B_3) si integra a vista [n. 7] e costituisce l'equivalente einsteiniano di un campo di forza costante. Lo spazio ambiente rimane rigorosamente euclideo; le linee di forza sono rette parallele, ma la intensità della forza (in senso statico) è costante soltanto in prima approssimazione; riesce invece ancora rigorosamente conforme al caso dei gravi (funzione lineare di una coordinata cartesiana) l'energia posizionale di un punto materiale posto nel campo.

Ho aggiunto [n. 8] un'ovvia riduzione delle equazioni di partenza a quella forma intrinseca sotto cui si sono ricavate le loro condizioni di integrabilità.

1. — Eliminazione delle derivate seconde di V dalle equazioni fondamentali.

Si tratta delle equazioni della statica dei campi vuoti [n. 3 della Nota precedente (1)]:

$$\mathfrak{M} = 0, \tag{I}$$

$$\alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3), \tag{II}$$

col significato dei simboli ivi richiamato.

Giova anzitutto formare le condizioni di integrabilità delle (II), eliminandone le derivate terze (covarianti) della V a norma delle note identità (2)

$$V_{rpq} - V_{rqp} + \sum_1^3{}_s a_{rs,pq} V^{(s)} = 0 \qquad (p, q, r = 1, 2, 3).$$

Ove vi si introducano per V_{rpq}, V_{rqp} i valori ricavati dalle (II), e si divida tutto per —V, si ottiene

$$\alpha_{rpq} - \alpha_{rqp} + \alpha_{rp} v_q - \alpha_{rq} v_p - \sum_1^3{}_s a_{rs,pq} v^{(s)} = 0 \tag{1}$$

$$(r, p, q = 1, 2, 3),$$

avendo posto

$$V = c e^v, \tag{2}$$

con c costante (di omogeneità) *a priori* arbitraria.

2. — Richiami di geometria intrinseca.

Per lo studio delle (1), giova far largo posto alla metrica dello spazio ambiente, riferendosi ad una terna (pel momento generica) di congruenze ortogonali [1], [2], [3] (3). Designeremo al solito con 1, 2, 3 le linee, o

(1) Pp. 307-317 del vol. XXVI di questi Rendiconti (2° semestre 1917).

(2) Ricci et Levi-Civita, *Méthodes* etc., Math. Ann., B. 54, 1900, pag. 143.

(3) Ibidem, Cap. II.

anche le direzioni, corrispondenti; con $\lambda_i^{(r)}$, $\lambda_{i|r}$ $(r = 1, 2, 3)$ i sistemi coordinati contravariante e covariante della congruenza $[i]$. Sussisteranno le relazioni di ortogonalità

$$(3) \qquad \sum_1^3{}_r \lambda_{i|r} \lambda_k^{(r)} = \varepsilon_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

col solito significato delle ε_{ik} (0 per $i \neq k$ e 1 per $i = k$).

La derivata di una qualsiasi funzione v rapporto all'arco l_i della linea i è evidentemente espressa da

$$(4) \qquad \frac{dv}{dl_i} = \sum_1^3{}_r v_r \lambda_i^{(r)},$$

le v_r rappresentando [come già nelle (1)] derivate (ordinarie, o, ciò che fa lo stesso, covarianti) della funzione v.

Gli invarianti differenziali di prim'ordine relativi alla terna sono (tutti e soli) i coefficienti di rotazione di Ricci:

$$(5) \qquad \gamma_{hik} = -\gamma_{ihk} = \sum_1^3{}_{rq} \lambda_{h|rq} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(q)} \qquad (h, i, k = 1, 2, 3).$$

Tra gli invarianti di secondo ordine meritano speciale attenzione i seguenti:

$$(6) \qquad \gamma_{ij,hk} = \frac{d\gamma_{ijh}}{dl_k} - \frac{d\gamma_{ijk}}{dl_h} + \sum_1^3{}_{h'} \{\gamma_{ijh'}(\gamma_{h'hk} - \gamma_{h'kh}) + \gamma_{h'ik}\gamma_{h'jh} - \gamma_{h'ih}\gamma_{h'jk}\}$$
$$(i, j, h, k = 1, 2, 3),$$

legati ai simboli di Riemann e ai parametri di direzione della terna dalle relazioni

$$(7) \qquad \gamma_{ij,hk} = \sum_1^3{}_{rspq} a_{rs,pq} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)}.$$

Giova ricordare altresì che, per le varietà ternarie — ed è il caso nostro — le γ con quattro indici si riducono sostanzialmente allo schema

$$(6') \qquad \gamma_{ik} = \gamma_{ki} = \gamma_{i+1\,i+2,\,k+1\,k+2} = -\gamma_{i+2\,i+1,\,k+1\,k+2} = -\gamma_{i+1\,i+2,\,k+2\,k+1}$$
$$(i, k = 1, 2, 3),$$

colla solita convenzione di risguardare equivalenti gli indici che differiscono per multipli di 3.

Le γ_{ik} si comportano rispetto ai simboli α_{ik} di Ricci come le γ a quattro indici rispetto ai simboli di Riemann, avendosi, in luogo delle (7), le formule più semplici

$$(7') \qquad \gamma_{ik} = \sum_1^3{}_{rq} \alpha_{rq} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(q)},$$

che si possono anche scrivere sotto la forma equivalente

$$(7'') \qquad \alpha_{rp} = \sum_{1}^{3}{}_{h'k'} \gamma_{h'k'} \lambda_{h'|r} \lambda_{k'|p} .$$

Se ne trae, per derivazione covariante,

$$\alpha_{rpq} = \sum_{1}^{3}{}_{h'k'} \left\{ \frac{\partial \gamma_{h'k'}}{\partial x_q} \lambda_{h'|r} \lambda_{k'|p} + \gamma_{h'k'} (\lambda_{h'|rq} \lambda_{k'|p} + \lambda_{h'|r} \lambda_{k'|pq}) \right\} .$$

A queste equazioni covarianti (rispetto ai tre indici p , q , r) se ne possono sostituire altrettante singolarmente invarianti, col criterio abituale di saturare gli indici. Basta moltiplicare per $\lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)}$ e sommare rispetto ai tre indici p , q , r.

Badando alle (3) e (5), risulta

$$(8) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{rpq} \alpha_{rpq} \lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)} = \frac{d\gamma_{ih}}{dl_k} + \sum_{1}^{3}{}_{j} (\gamma_{jh} \gamma_{jik} + \gamma_{ij} \gamma_{jhk}) .$$

3. — Trasformazione delle condizioni di integrabilità e delle equazioni di Bianchi.

La stessa saturazione degli indici (moltiplicazione per $\lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)}$ e somma rapporto a p , q , r) può essere applicata alle condizioni di integrabilità (1). Gioverà preventivamente immaginare sostituita nell'ultimo sommatorio, al posto di $v^{(s)}$, l'espressione [equivalente in base alle (4)] $\sum_{1}^{3}{}_{j} \frac{dv}{dl_j} \lambda_j^{(s)}$. Ove si tenga conto altresì delle (8), (3), (4) e (7), si ricava

$$(9) \qquad \frac{d\gamma_{ih}}{dl_k} - \frac{d\gamma_{ik}}{dl_h} + \sum_{1}^{3}{}_{j} \{ \gamma_{jh} \gamma_{jik} - \gamma_{jk} \gamma_{jih} + \gamma_{ij} (\gamma_{jhk} - \gamma_{jkh}) \} + \gamma_{ih} \frac{dv}{dl_k} - \gamma_{ik} \frac{dv}{dl_h} - \sum_{1}^{3}{}_{j} \gamma_{ij,hk} \frac{dv}{dl_j} = 0 .$$

Nell'ultimo termine compariscono ancora le γ con quattro indici, che si riconducono, quando si voglia, a quelle a due, in base alle (6'). Basta prendere le mosse dall'osservazione che i primi membri delle (9) sono emisimmetrici rispetto ai due indici h e k, cambiando unicamente di segno, quando si scambiano h e k. Si può perciò limitarsi a considerare nelle (9) tre combinazioni semplici dei due indici h e k, per es. le seguenti:

$$\begin{aligned} h &= i + 1 \quad , \quad k = i + 2 ; \\ h &= i + 2 \quad , \quad k = i \quad ; \\ h &= i \quad , \quad k = i + 1 . \end{aligned}$$

Se inoltre, in

$$\sum_{1}^{3}{}_{j} \gamma_{ij,hk} \frac{dv}{dl_j} ,$$

si attribuiscono a j i valori i, $i+1$, $i+2$ (e si tien presente che $\gamma_{ii,hk}=0$) si riscontrano nello sviluppo del sommatorio sole γ a quattro indici dello schema (6'), ossia γ a due indici. Mi dispenso dall'esplicitare questo calcolo in generale, dovendo riprenderlo tra un momento con referenza alla terna principale (anzichè a congruenze ortogonali qualisivogliono).

Completo intanto le formule non specializzate, attribuendo col Ricci [1] forma intrinseca anche alle equazioni segnalate dal Bianchi, cui soddisfanno identicamente le derivate dei simboli di Riemann. Esse possono essere scritte [2]:

$$\sum_{1}^{3}{}_{pq} a^{(pq)} G_{rpq} - \tfrac{1}{2} G_r = 0 \qquad (r=1,2,3),$$

dove

$$G_{rp} = \sum_{1}^{3}{}_{jh} a^{(jh)} a_{rj,hp}$$

e G è il relativo invariante lineare $\sum_{1}^{3}{}_{rp} a^{(rp)} G_{rp}$. Per le varietà a tre dimensioni si ha [3]

$$G_{rp} = \alpha_{rp} - \mathfrak{M} a_{rp},$$

quindi

$$G = -2\mathfrak{M},$$
$$G_{rpq} = \alpha_{rpq} - \mathfrak{M}_q a_{rp},$$

e le precedenti equazioni possono essere scritte

$$\sum_{1}^{3}{}_{pq} a^{(pq)} \alpha_{rpq} = 0.$$

Saturiamo anche l'indice r, moltiplicando per $\lambda_i^{(r)}$ e sommando rispetto ad r. Tenendo conto delle (8), si ottiene

$$\sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{d\gamma_{ik}}{dl_k} + \sum_{1}^{3}{}_{hk} (\gamma_{hk}\gamma_{hik} + \gamma_{ik}\gamma_{hkk}) = 0. \tag{10}$$

4. — Riferimento alla terna principale.

Se le tre congruenze [1], [2], [3] costituiscono la terna principale di curvatura (o una di tali terne nei casi di indeterminazione) [4], si ha

$$\gamma_{ik} = \varepsilon_{ik}\omega_i \qquad (i,k=1,2,3), \tag{11}$$

[1] *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni*, in questi Rendiconti, vol. XII (1° sem. 1903), pp. 409-420.

[2] Cfr. la Nota *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*, ibidem, vol. XXVI (1° sem. 1917), pag. 388.

[3] *Statica einsteiniana*, ibidem, pag. 463.

[4] Ricci et Levi-Civita, loc. cit., pag. 163.

essendo $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le tre curvature principali, cioè le radici della equazione cubica

$$\|\alpha_{ik} - \omega a_{ik}\| = 0 .$$

La loro somma (curvatura media) è $\mathfrak{M} = \sum_{ik}^{3} a^{(ik)} \alpha_{ik}$. Si può quindi, mettendo in evidenza le ω, assumere la (I) sotto la forma

(I*) $$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 .$$

Introduciamo nelle (10) i valori (11) delle γ_{ik}, ed esplicitiamo distinguendo i tre casi già indicati al n. precedente. In base alle sole (6'), che in virtù delle (11) divengono

$$\gamma_{h+1\,h+2,\,k+1\,k+2} = \cdots = \varepsilon_{hk}\,\omega_k$$

(e all'annullarsi identico delle γ_{iih}, $\gamma_{ii,hk}$), risulta materialmente:

Per $h = i+1$, $k = i+2$,

(12) $$\omega_{i+1}\,\gamma_{i+1\,i\,i+2} - \omega_{i+2}\,\gamma_{i+2\,i\,i+1} + \omega_i(\gamma_{i\,i+1\,i+2} - \gamma_{i\,i+2\,i+1}) = 0 ;$$

per $h = i+2$, $k = i$,

(13) $$-\frac{d\omega_i}{dl_{i+2}} + \omega_{i+2}\,\gamma_{i+2\,i\,i} + \omega_i\,\gamma_{i\,i+2\,i} - \frac{dv}{dl_{i+2}}\,\omega_i + \frac{dv}{dl_{i+2}}\,\omega_{i+1} = 0 ;$$

per $h = i$, $k = i+1$,

(14) $$\frac{d\omega_i}{dl_{i+1}} - \omega_{i+1}\,\gamma_{i+1\,i\,i} - \omega_i\,\gamma_{i\,i+1\,i} + \frac{dv}{dl_{i+1}}\,\omega_i - \frac{dv}{dl_{i+1}}\,\omega_{i+2} = 0$$
$$(i = 1, 2, 3) .$$

Le γ con tre indici distinti, che sole compariscono nelle (12), si possono (attesa la emisimmetria rispetto ai due primi indici) rappresentare con una notazione più comoda, ponendo

(15) $$\gamma_i = \gamma_{i+1\,i+2\,i} = -\gamma_{i+2\,i+1\,i} ,$$

Con ciò le (12) divengono

$$-\omega_{i+1}\,\gamma_{i+2} - \omega_{i+2}\,\gamma_{i+1} + \omega_i(\gamma_{i+2} + \gamma_{i+1}) = 0 ,$$

le quali, introducendo le mutue differenze delle curvature principali

(16) $$\delta_i = \omega_{i+2} - \omega_{i+1} ,$$

si semplificano ulteriormente in

$$\delta_{i+1}\,\gamma_{i+1} = \delta_{i+2}\,\gamma_{i+2} .$$

Val quanto dire che le (12) si riducono a due sole algebricamente distinte esprimenti che il prodotto

$$\delta_i \gamma_i = \varpi \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{III}$$

è indipendente dall'indice i.

Se, nelle (13), si cambia i in $i+1$ (il che implica $i+1$ in $i+2$ e $i+2$ in i), e poi, senza toccare l'indice i, si scrive materialmente k al posto di $i+1$ e j al posto di $i+2$, si ottiene (invertendo anche il segno)

$$\frac{d\omega_k}{dl_i} + (\omega_i - \omega_k)\,\gamma_{kik} + \frac{dv}{dl_i}(\omega_k - \omega_j) = 0\,. \tag{IV}$$

A questo stesso schema si riducono le (14), cambiandovi prima i in $i+2$, e poi scrivendo, senza toccare i, k in luogo di $i+2$ e j in luogo di $i+1$.

In definitiva, *le* (IV) *sostituiscono opportunamente entrambi i gruppi* (13) *e* (14), *coll'intesa che* i, k, j *rappresentano tre indici distinti.*

Accanto alle (III) e (IV) vanno pur prese in considerazione le (10), che esprimono anch'esse condizioni di integrabilità (valide per qualsiasi varietà a tre dimensioni, a differenza delle (III) e (IV) che provengono specificamente dalle equazioni di Einstein). Tali equazioni, riferite anche esse alla terna principale mediante le (11), assumono l'aspetto, già segnalato dal Ricci,

$$\frac{d\omega_i}{dl_i} + \sum_{1}^{3}{}_{k}\,(\omega_k - \omega_i)\,\gamma_{kik} = 0\,. \tag{17}$$

Sotto questo aspetto si vede subito che si tratta di condizioni già implicitamente contenute nelle (IV), in virtù delle (I*). Infatti immaginiamo, nelle (IV) stesse, di attribuire a k i due valori diversi da i e di sommare. I primi due termini, per essere nulla la somma delle ω, dànno $-\frac{d\omega_i}{dl_i}$; gli ultimi due si elidono; alla somma dei medî si può anche aggiungere l'addendo (nullo) corrispondente al valore i di k. Risulta così

$$-\frac{d\omega_i}{dl_i} + \sum_{1}^{3}{}_{k}\,(\omega_i - \omega_k)\,\gamma_{kik} = 0\,,$$

ossia precisamente la (17).

5. — Discussione delle (III) e conseguente ripartizione degli spazi potenziati vuoti in due tipi A) e B).

A norma delle (III), vi sono due tipi di metriche *a priori* possibili negli spazi vuoti: il tipo A) corrispondente alla restrizione qualitativa $\varpi \neq 0$; e il tipo B) caratterizzato dall'annullarsi di ϖ. Non a caso ho

adoperato la lettera A) per designare il primo tipo, volendo alludere alla necessaria *anormalità* delle congruenze principali. Si ricordi infatti che, data una terna generica, la condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza $[i]$ sia normale (cioè costituita dalle traiettorie ortogonali ad una famiglia di superficie) è espressa dall'annullarsi della *anormalità*

$$\gamma_{ii+1\,i+2} - \gamma_{ii+2\,i+1} .$$

Colla notazione adottata poc'anzi, tale anormalità della $[i]$ vale

$$\gamma_{i+1} + \gamma_{i+2} .$$

Ciò posto, qualora fosse $\gamma_{i+1} + \gamma_{i+2} = 0$, essendo ciascuna delle γ diversa da zero in causa di $\varpi \neq 0$, si avrebbe dalle (III)

$$\delta_{i+1} = \frac{\varpi}{\gamma_{i+1}} = -\delta_{i+2}$$

e quindi, per le (16),

$$\omega_i - \omega_{i+2} = -(\omega_{i+1} - \omega_i),$$

ossia $\delta_i = 0$, il che è inconciliabile con $\varpi \neq 0$.

Dunque, *nel caso* A) *le congruenze principali sono tutte tre necessariamente anormali; inoltre* (dacchè non può neanche annullarsi qualcuna delle δ) *le corrispondenti curvature sono essenzialmente distinte.*

6. — Suddivisione del tipo B).

Per questo secondo tipo si ha

$$\text{(III')} \qquad \delta_i \gamma_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e il modo di annullarsi dei primi membri porge un ulteriore criterio di classificazione. Giova prendere norma dall'ellissoide di curvatura (eventualmente degenere), che ha per assi le ω_i. Si è condotti ai tre sottocasi seguenti:

B_1) (ellissoide a tre assi). Le δ_i sono tutte diverse da zero, e le (III') equivalgono all'annullarsi delle γ_i. Si tratta manifestamente di spazi *normali* (nel senso di Bianchi), risultando normali le tre congruenze principali di curvatura. È perciò giustificato il qualificare B_1) come tipo o sottotipo *normale*.

B_2) (ellissoide rotondo). Una sola delle δ, diciamo δ_3, si annulla, sicchè le (III') esigono

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 .$$

La congruenza [3] risulta quindi normale.

Questo sottocaso può dirsi in conformità *seminormale* perchè è normale una almeno delle congruenze principali.

B_3) (sfera). L'ultima eventualità *a priori* possibile si ha supponendo tutte le ω eguali tra loro, e quindi [teorema di Schur, immediatamente desumibile dalle (17)] ad una medesima costante.

7. — Ovvia caratterizzazione geometrica e statica del sottocaso B_3).

In relazione al problema meccanico che è origine e scopo delle presenti ricerche, *il sottocaso* B_3) *può dirsi elementare o galileiano.* Ed ecco perchè. Dovendosi [per la (I) o (I*)] annullare la curvatura media, riconosciamo in primo luogo che il valore comune (e costante) delle tre curvature principali non può essere che zero. Si tratta quindi dell'ordinario spazio euclideo, con che si annullano tutte le α_{ik}. Riferendosi a coordinate cartesiane, le derivazioni covarianti si identificano con derivazioni ordinarie, sicchè le (II) si riducono a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Ciò val quanto dire V funzione lineare delle coordinate cartesiane, e quindi riducibile senza pregiudizio della generalità (mediante opportuna orientazione degli assi e scelta dell'origine) alla forma $c + \frac{1}{c} g x_3$ (c velocità della luce in assenza d'egni circostanza perturbatrice, g costante).

L'energia *posizionale* dell'unità di massa posta nel campo è espressa [1] da

$$cV - c^2 = g x_3 ,$$

come nel caso dei gravi, quando x_3 rappresenta la quota. La forza statica del campo è il gradiente di $-\frac{1}{2} V^2$. Essa è quindi costante in direzione, ma non rigorosamente in grandezza; può risguardarsi tale tostochè sia trascurabile $g x_3$ di fronte a c^2.

8. — Forma intrinseca delle (II).

Terminerò questa seconda Nota mettendo sotto forma intrinseca (analoga a quella sotto cui si ricavarono le condizioni di integrabilità) anche le equazioni (II) di Einstein: la (I) ha già questo carattere, come appare materialmente da (I*).

[1] Nota I, nel vol. XXVI di questi Rendiconti (2° semestre 1917), pag. 307.

All'uopo mi riporto alle (4), che, risolute [mercè le (3)] rapporto alle v_r, e riferite alla funzione V anzichè alla v, dànno

$$V_p = \sum_1^3{}_j \frac{dV}{dl_j} \lambda_{j|p} .$$

Introducendo, in luogo di V, la funzione $\frac{dV}{dl_j}$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{dV}{dl_j}\right) = \sum_1^3{}_h \frac{d}{dl_h}\left(\frac{dV}{dl_j}\right) \lambda_{h|q} ;$$

sicchè, per derivazione covariante della precedente, risulta

$$V_{pq} = \sum_1^3{}_j \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{dV}{dl_j}\right) \lambda_{j|p} + \sum_1^3{}_j \frac{dV}{dl_j} \lambda_{j|pq} =$$

$$\sum_1^3{}_{jh} \frac{d}{dl_h}\left(\frac{dV}{dl_j}\right) \lambda_{j|p} \lambda_{h|q} + \sum_1^3{}_j \frac{dV}{dl_j} \lambda_{j|pq} .$$

Saturando i due indici p , q, mediante moltiplicazione per $\lambda_i^{(p)} \lambda_k^{(q)}$ e somma rapporto a p , q, si ottiene, in base alle (3) e (5),

$$\sum_1^3{}_{pq} V_{pq} \lambda_i^{(p)} \lambda_k^{(q)} = \frac{d}{dl_k}\left(\frac{dV}{dl_i}\right) + \sum_1^3{}_j \gamma_{jik} \frac{dV}{dl_j} .$$

A norma di questa formula e della (7'), la stessa saturazione, applicata alle equazioni (II),

$$\alpha_{pq} + \frac{V_{pq}}{V} = 0 ,$$

porta alle equivalenti

$$(II^*) \qquad \gamma_{ik} + \frac{1}{V} \frac{d}{dl_k}\left(\frac{dV}{dl_i}\right) + \sum_1^3{}_j \gamma_{jik} \frac{1}{V} \frac{dV}{dl_j} = 0 \qquad (i , k = 1 , 2 , 3) ,$$

che appunto volevamo fissare, onde averle in pronto all'occasione.

Fisica terrestre. — *Sulla propagazione delle onde sismiche.* Nota III del Socio C. Somigliana.

I.

Ho accennato, in fine della Nota II (1), alla possibilità di ottenere pel rapporto $V_1 : V_2$ delle velocità superficiali, calcolato secondo la teoria, un valore che maggiormente si approssimi a quelli osservati per il rapporto $V_P : V_S$ delle velocità di propagazione delle onde prime e seconde, mediante una variazione del valore 1:4 generalmente ammesso pel coefficiente σ di Poisson relativo alla terra. Questo valore 1:4 è desunto dal valore medio che quel coefficiente ha pei materiali superficiali terrestri. Niente ci autorizza ad ammettere che esso debba conservarsi inalterato pei materiali sconosciuti dell'interno. È più naturale quindi di cercarne il valore per via indiretta in base ai dati fornitici dalle osservazioni sismiche.

Procedendo con questo criterio noi dovremmo cercare quali siano i valori di σ che fanno assumere al rapporto $V_1 : V_2$ valori compresi fra 1,80 e 1,85 (2). Questi valori sono confermati da un gran numero di osservazioni ed indirettamente dal calcolo delle distanze epicentrali. A ragione quindi il prof. De Marchi ed il prof. Oddone hanno richiamato la mia attenzione sulla discordanza fra questi valori ed il valore 1,12 a cui io ero giunto accettando per σ il valore 1:4.

Volendo studiare la quistione da un punto di vista generale, senza entrare in troppo complicate questioni analitiche, conviene esaminare i limiti entro cui varia il valore del rapporto $\sqrt{\eta_1} : \sqrt{\eta_2}$ delle due maggiori radici della equazione di Rayleigh, quando σ varia fra i limiti che a questo coefficiente assegna la teoria dell'elasticità.

Ora i limiti imposti ai coefficienti elastici di un materiale isotropo sono determinati dalla condizione di stabilità dell'equilibrio elastico, che si traduce nell'altra che l'energia elastica sia rappresentata da un'espressione essenzialmente positiva. Questa espressione colle notazioni solite, e introducendo le costanti λ, μ di Lamé, è la seguente:

$$2E = \lambda(x_x + y_y + z_z)^2 + 2\mu(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2)$$

(1) Vol. XXVI, pag. 472 di questi Rendiconti, 6 maggio 1917.

(2) Prendo questi valori dall'accurato lavoro eseguito dal prof. Rizzo sui dati del terremoto di Messina del 28 dicembre 1908. Essi risultano da una tabella relativa alla propagazione fino a 11000 chilometri, costruita in base alle osservazioni raccolte in 110 stazioni sismiche. G. B. Rizzo, *Sulla propagazione dei movimenti prodotti dal terremoto di Messina del 28 dicembre 1908*. Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, tomo LXI, 1911.

e le condizioni di positività di questa forma quadratica sono

$$3\lambda + 2\mu > 0 \qquad \mu > 0$$

e quindi, poichè

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

risultano per il coefficiente di Poisson i seguenti limiti:

$$-1 < \sigma < \frac{1}{2}.$$

Il valore estremo superiore 1:2 si ha nel caso della incompressibilità del mezzo, $\lambda = \infty$. Il rapporto $b^2 : a^2$ dei quadrati delle velocità di propagazione delle onde trasversali e longitudinali si annulla in questo caso. Mentre per $\sigma = -1$ si ha $b^2 : a^2 = 3:4$, ed il modulo di compressione $\lambda + 2/3\,\mu$ si annulla. Come si vede, questi limiti non escludono la possibilità di valori negativi pel coefficiente di Poisson. Anche lord Rayleigh nella classica Memoria *On waves propagated* ..., che è il punto di partenza della nostra ricerca, insiste sopra questa possibilità, quantunque non sia generalmente presa in considerazione dai fisici.

Ora il risultato finale a cui si arriva esaminando l'intervallo entro cui varia il rapporto $\sqrt{\eta_1} : \sqrt{\eta_2}$, quando si assumono per σ tutti i valori possibili meccanicamente, può essere riassunto nelle considerazioni seguenti.

L'ipotesi meno restrittiva, che si può fare per il valore del coefficiente σ, relativo alla terra presa nel suo insieme, è che esso sia la media di tutti i valori possibili secondo la teoria meccanica della elasticità; cioè sia

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Se si assume per σ questo valore, si trova pel rapporto $\sqrt{\eta_1} : \sqrt{\eta_2}$ un valore che differisce pochissimo da quelli osservati per il rapporto $V_P : V_S$.

Infatti pel valore precedente di σ si ha $b^2 : a^2 = 3:5$, e l'equazione di Rayleigh (Nota I, 19) prende la forma

$$F(\eta) = 5\eta^3 - 40\eta^2 + 72\eta - 32 = 0.$$

Questa equazione ha le radici reali, e per esse si possono assegnare i seguenti valori approssimati per difetto a meno di un millesimo:

$$\eta_1 = 5{,}653 \qquad \eta_2 = 1{,}668 \qquad \eta_3 = 0{,}678.$$

Abbiamo così

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = 3{,}389 \qquad \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} = \frac{V_1}{V_2} = 1{,}84.$$

Questo valore concorda perfettamente coi valori del rapporto $V_P : V_S$ ricavato

dalle osservazioni delle onde prime e seconde, rapporto che ha effettivamente significato di una costante terrestre, poichè varia entro limiti ristrettissimi, quantunque V_P e V_S, prese isolatamente, siano invece crescenti con la distanza dall'epicentro. Non altrettanto può dirsi degli altri due rapporti, in cui compare V_L; e quindi un confronto coi nostri valori teorici non presenta notevole interesse.

Possiamo quindi concludere che l'accordo fra l'ipotesi enunciata da noi e l'osservazione è possibile assumendo per il coefficiente di Poisson il valore $-1:4$. Questo valore è meccanicamente possibile; non discuteremo qui della sua possibilità fisica.

Ci proporremo invece di enunciare un'altra interpretazione dei risultati teorici esposti, per la quale questa ed altre difficoltà non si presentano. Notiamo anzitutto che la propagazione, studiata da noi, nel suolo illimitato, non riguarda la fase iniziale, quando le onde partenti dall'ipocentro non sono ancora giunte in superficie e si può effettivamente pensare che l'onda longitudinale proceda separata dalla trasversale, come si suole comunemente ammettere dai sismologi. La nostra soluzione riguarda piuttosto una fase di regime, quando tutte le onde sono arrivate alla superficie del suolo. Ora osservazioni recenti hanno permesso di distinguere fra le onde superficiali, che costituiscono le onde lunghe, varî gruppi, pei quali furono determinate le corrispondenti velocità di propagazione. Queste velocità variano pochissimo colla distanza dall'epicentro, sono cioè sensibilmente costanti sulla superficie terrestre. Nella già citata Memoria del prof. Rizzo sono classificati tre gruppi di queste onde, le cui velocità di propagazione V_1^*, V_2^*, V_3^* fra 500 e 11000 chilometri variano fra i seguenti limiti:

$$V_1^* \text{ fra } 4{,}2 \text{ e } 4{,}7 \ \frac{\text{Km.}}{\text{sec.}}$$
$$V_2^* \text{ » } 3{,}6 \text{ » } 4{,}0 \text{ »}$$
$$V_3^* \text{ » } 3{,}2 \text{ » } 3{,}5 \text{ »}$$

Si può allora fare l'ipotesi che siano questi i tre gruppi di onde che corrispondono alle tre onde da noi studiate teoricamente. I valori di V_1^*, V_2^*, V_3^* possono effettivamente essere considerati come costanti sulla superficie, come le velocità superficiali delle onde teoriche. Inoltre i valori del rapporto $V_1^* : V_2^*$ dati dalle osservazioni, variano entro limiti assai ristretti. Dalla tabella, calcolata dal prof. Rizzo alla fine della sua Memoria, risultano per questo rapporto valori compresi fra 1,12 e 1,20 ed un valor medio uguale a 1,15.

Ora questi valori si accordano col valore del rapporto teorico $V_1 : V_2$ che noi abbiamo calcolato, nell'ipotesi che fosse $\sigma = 1:4$ (Nota II). Questo valore era

$$V_1^* : V_2^* = 1{,}12 .$$

Possiamo quindi ritenere che esso concordi con questa nuova ipotesi. Essa è quindi compatibile col valore ordinariamente accettato pel coefficiente di Poisson relativo agli strati superficiali terrestri, che è anche la media dei valori *positivi* meccanicamente possibili per tale coefficiente.

Minore è l'accordo invece fra i valori teorici ed i valori d'osservazione per l'altro rapporto $V_1 : V_3$, risultando questi più piccoli dei primi. Abbiamo trovato pel valore teorico 2,17, mentre i valori risultanti dalla tabella del prof. Rizzo sono compresi fra 1,26 e 1,35. Mi mancano attualmente altri dati per poter istituire un confronto più esteso.

Riassumendo, possiamo dire che lo studio teorico del problema della propagazione delle onde piane in un suolo piano, omogeneo, isotropo, illimitato ci ha condotti ad una generalizzazione della soluzione trovata da lord Rayleigh nella sua classica Memoria *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid* del 1885. Siamo così stati condotti alla dimostrazione dell'esistenza di due altri sistemi di onde, oltre quelli scoperti da lord Rayleigh. Queste onde esistono qualunque sia il valore della costante di Poisson, che si attribuisce al mezzo vibrante, purchè compreso fra i limiti -1 e $1:2$, assegnati dalla teoria.

Questo risultato teorico permette di analizzare da un punto di vista generale la possibilità di trovare una rappresentazione meccanica delle onde sismiche mediante la teoria delle onde piane in un suolo piano illimitato.

Due di queste possibilità abbiamo preso in esame. La prima, e più seducente, consiste nell'assimilare le tre onde tipiche dei sismogrammi (P) (S) (L) alle tre onde connesse colle tre radici dell'equazione di Rayleigh. La conclusione a cui siamo giunti nell'esame di questa ipotesi è che l'accordo coi dati numerici sperimentali è possibile, quando si ammetta che il valore del coefficiente di Poisson per la Terra sia la media di tutti i valori meccanicamente ammissibili, cioè $-1:4$. Qualora non si vogliano ammettere valori negativi per il coefficiente di Poisson, sarebbe questo risultato un argomento di condanna per l'ipotesi enunciata, naturalmente nella supposizione che il suolo indefinito sia un modello sufficiente per la rappresentazione delle oscillazioni sismiche.

L'altra possibilità che abbiamo considerata è che la teoria delle onde associate serva unicamente alla interpretazione meccanica delle onde lunghe, ordinariamente considerate come onde superficiali. È possibile allora trovare delle concordanze numeriche coi dati d'osservazione, senza abbandonare l'ordinario assunto, che il coefficiente di Poisson per la Terra sia uguale alla media dei valori *positivi* meccanicamente possibili, o anche alla media dei valori effettivamente misurati sui materiali della superficie terrestre.

Solo un esame più approfondito dei sismogrammi potrà decidere quale di queste ipotesi possa essere accettata, o rifiutata.

II.

Per completare l'analisi del problema meccanico studiato nelle due Note precedenti, riprendiamo l'equazione di Rayleigh per le velocità [(19), Nota I]. Introducendo la costante

$$\tau = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{2(1-\sigma)}$$

quell'equazione diviene

$$\eta^3 - 8\eta^2 + 8(1+2\tau)\eta - 16\tau = 0 . \tag{1}$$

Ci proponiamo di studiare come variano le radici di questa equazione quando τ assume tutti i valori corrispondenti ai valori possibili per σ, cioè

$$\frac{1}{4} \leq \tau \leq 1 .$$

L'equazione (1) si riduce a forma canonica ponendo

$$\eta = \xi + \frac{8}{3}$$

e diviene

$$\xi^3 + \frac{8}{3}(6\tau - 5)\xi + \frac{16}{3}\left(5\tau - \frac{28}{9}\right) = 0 .$$

La condizione perchè le tre radici siano reali si può così scrivere

$$3^6 \Delta(\tau) = (45\tau - 28)^2 + (12\tau - 10)^3 < 0 .$$

Ora

$$\text{per } \tau = \frac{28}{45} = 0{,}622\ldots \text{ si ha } \Delta(\tau) < 0$$

$$\text{per } \tau = \frac{10}{12} = 0{,}833\ldots \text{ si ha } \Delta(\tau) > 0 .$$

Esiste quindi un valore τ' di τ, compreso fra i limiti indicati, per il quale si ha

$$\Delta(\tau') = 0 .$$

Per questo valore si trova $\tau' = 0{,}6790$ e pel corrispondente valore σ' di σ si ha

$$\sigma' = 0{,}2637$$

cioè un valore di poco superiore al valore 0,25 solitamente assunto per σ. Questi valori sono approssimati per difetto.

Questo valore σ' di σ è anche quello per cui le due radici dell'equazione di Rayleigh, superiori all'unità, divengono uguali. Possiamo quindi concludere:

Le tre radici dell'equazione di Rayleigh sono reali per

$$-1 \leq \sigma \leq \sigma' .$$

L'equazione ha invece due radici complesse per

$$\sigma' < \sigma \leq \frac{1}{2} .$$

Il rapporto delle due radici $\eta_1 : \eta_2$ è uguale alla unità per $\sigma = \sigma'$ e va crescendo quando σ decresce fino a -1. È facile verificare che quando $\sigma = 0$, ha cioè il minimo valore non negativo, la radice quadrata di questo rapporto è ancora inferiore al valore minimo 1,80 fornito dalle osservazioni. Si ha infatti, per $\sigma = 0$, $\tau = 1:2$; è il caso dei corpi che possono allungarsi senza sensibile contrazione trasversale. L'equazione di Rayleigh diviene

$$\eta^3 - 8\eta^2 + 16\eta - 8 = 0$$

e si può scrivere

$$(\eta^2 - 6\eta + 1)(\eta - 2) = 0 .$$

Le sue radici sono quindi

$$\eta_1 = 3 + \sqrt{5} \qquad \eta_2 = 2 \qquad \eta_3 = 3 - \sqrt{5}$$

e si ha per il rapporto delle prime due

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = 2{,}61 \qquad \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} = 1{,}56 .$$

Conviene perciò raggiungere come si è visto il valore $\sigma = -0{,}25$ per ottenere un valore non inferiore ad 1,80.

Per $\sigma = 1:2$ si ha il caso dell'incompressibilità considerato anche da lord Rayleigh. Gli integrali del moto vibratorio da noi trovati hanno valore anche in questo caso, in cui, come per tutti i valori di σ superiori a σ', le prime due radici divengono complesse. Vedremo in seguito quale sia la forma che questi integrali assumono.

Notiamo finalmente che i valori delle tangenti dei due angoli d'emergenza delle due onde associate si mantengono sempre reali pei valori di σ compresi fra -1 e σ'; esse non possono perciò mai degenerare in onde di Rayleigh. Si aveva per queste tangenti

$$\operatorname{tg}^2 \theta_a = \eta \frac{b^2}{a^2} - 1 \qquad \operatorname{tg}^2 \theta_b = \eta - 1 .$$

Per i valori di σ uguali a -1, $-1:4$, 0 il rapporto $b^2 : a^2$ ha rispettivamente i valori 3:4, 3:5, 1:2; e si può verificare che i valori di η_1, η_2 sono rispettivamente maggiori di 4:3, 5:3, 2. Per $\sigma = -1:4$ abbiamo trovato

$$\eta_1 = 5{,}653 \qquad \eta_2 = 1{,}668 .$$

Abbiamo perciò per determinare gli angoli di emergenza corrispondenti a queste due radici

$$\operatorname{tg}^2\theta_a = 2{,}3918 \qquad \operatorname{tg}^2\theta_b = 4{,}653$$
$$\operatorname{tg}^2\theta_a = 0{,}0008 \qquad \operatorname{tg}^2\theta_b = 0{,}668\,.$$

La direzione di propagazione della seconda onda longitudinale è perciò pochissimo inclinata sul suolo.

III.

Per trovare finalmente quale sia la forma delle vibrazioni che corrispondono al caso in cui l'equazione di Rayleigh ha due radici complesse, ricordiamo le espressioni generali trovate per le componenti di vibrazione (1):

$$u = \frac{1}{2\operatorname{tg}\theta_a}\,\Psi(z\operatorname{tg}\theta_a + x - \mathrm{V}t) + \frac{\operatorname{tg}\theta_b}{1-\operatorname{tg}^2\theta_b}\,\Psi(z\operatorname{tg}\theta_b + x - \mathrm{V}t)$$

$$w = \frac{1}{2}\,\Psi(z\operatorname{tg}\theta_a + x - \mathrm{V}t) - \frac{1}{1-\operatorname{tg}^2\theta_b}\,\Psi(z\operatorname{tg}\theta_b + x - \mathrm{V}t)\,,$$

dove

$$\mathrm{V} = b\sqrt{\eta} \qquad \operatorname{tg}^2\theta_a = \frac{b^2}{a^2}\eta - 1 \qquad \operatorname{tg}^2\theta_b = \eta - 1\,,$$

essendo η una radice qualunque dell'equazione di Rayleigh. Quando $\eta < 1$ si hanno per $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$ valori puramente immaginarî, per V un valore reale; e si hanno allora le onde propriamente dette di Rayleigh. Ma quando η è complessa, risultano valori complessi per tutte queste costanti. A cagione della omogeneità delle equazioni del moto, dagli integrali precedenti si possono ancora dedurre, prendendone la parte reale o la parte immaginaria, integrali reali, di cui possiamo vedere sommariamente la forma. Supponiamo

$$\eta = \alpha + i\beta\,.$$

Dalle formole precedenti avremo

$$\operatorname{tg}^2\theta_a = \alpha\frac{b^2}{a^2} - 1 + i\frac{b^2}{a^2}\beta \qquad \operatorname{tg}^2\theta_b = \alpha - 1 + i\beta \qquad \mathrm{V} = b\sqrt{\alpha + i\beta}\,.$$

Ricordando che dalla relazione

$$\mathrm{A} + i\,\mathrm{B} = \sqrt{\alpha + i\beta}$$

si ricava

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} + \alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \mathrm{B} = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2} - \alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(1) Per un'inesattezza di calcolo nelle formole (23) (23′) (24) della Nota I, e nelle corrispondenti della Nota II, figurano indebitamente le costanti α_1, α_2. Esse devono porsi entrambe uguali all'unità; perciò anche il loro rapporto non può essere arbitrariamente fissato, come è detto alla fine della Nota I.

è facile calcolare i valori della parte reale e della immaginaria di $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$, V. Per brevità scriveremo

$$\operatorname{tg}\theta_a = A_1 + iB_1 \qquad \operatorname{tg}\theta_b = A_2 + iB_2 \quad , \qquad V = V_1 + iV_2 \, .$$

Le espressioni che formano l'argomento della funzione Ψ divengono

$$z\operatorname{tg}\theta_a + x - Vt = (A_1 + iB_1)z + x - (V_1 + iV_2)t$$
$$z\operatorname{tg}\theta_b + x - Vt = (A_2 + iB_2)z + x - (V_1 + iV_2)t \, .$$

Perciò se supponiamo che la funzione $\Psi(\xi)$ abbia la solita forma

$$\Psi(\xi) = e^{ic\xi} \, ,$$

ove c è la costante che determina la frequenza della vibrazione, troviamo

$$\Psi(z\operatorname{tg}\theta_a + x - Vt) = e^{-c(B_1 z - V_2 t) + ic(A_1 z + x - V_1 t)}$$
$$\Psi(z\operatorname{tg}\theta_b + x - Vt) = e^{-c(B_2 z - V_2 t) + ic(A_2 z + x - V_1 t)} \, .$$

Perciò la velocità di propagazione superficiale che compete alle onde corrispondenti alle due radici complesse coniugate, è la stessa

$$V_1 = \frac{b}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + a\right)^{\frac{1}{2}}$$

e vengono così a sovrapporsi nella propagazione in superficie le due coppie di onde associate corrispondenti.

Il fattore esponenziale dipende, oltre che dalla profondità z, anche dal tempo. Abbiamo quindi uno smorzamento della vibrazione, in senso generale, non solo rispetto alla profondità, ma anche nel tempo.

Il caso dell'incompressibilità del materiale vibrante, caso che è stato preso in considerazione anche da lord Rayleigh, rientra in questi ora studiati; si ha infatti in questo caso $\sigma = 1:2$. I valori $\alpha \pm i\beta$ delle radici complesse sono stati calcolati da lord Rayleigh (*), il quale ha trovato

$$\eta = 3{,}5436 \pm 2{,}2301\, i \, .$$

(*) (Scient. Papers, vol. II, pag. 444). Per la radice reale lord Rayleigh trova 0,91275, valore che è stato corretto da Bromwich in 0,91262 (Bromwich, *On the Influence of Gravity on Elastic Waves, and, in particular, on the Vibrations of an Elastic Globe* (Proc. London Math. Soc., vol. XXX, pag. 103).

Matematica. — *Sulle varietà a tre dimensioni dotate di terne principali di congruenze geodetiche.* Nota I del Socio GREGORIO RICCI.

In questa Nota ed in altra, che la seguirà da vicino, mi propongo di determinare intrinsecamente tutte le V_3, che godono della proprietà, che è chiarita nel titolo. Con questo intendimento per ognuna di tali V_3 determino le terne fondamentali corrispondenti alle terne principali di congruenze geodetiche, le quali quadrate e sommate forniscono poi una espressione canonica del suo ds^2 (1).

Come è intuitivo, per lo spazio euclideo le terne anzidette sono tutte e soltanto quelle costituite dalle rette normali ad un piano e da quelle tracciate nei piani ad esso paralleli in modo che le rette giacenti sopra uno stesso piano costituiscano un reticolato cartesiano ortogonale, il quale ruota (e in particolare può mantenersi parallelo a se stesso) nel passare da un piano all'altro. La infinità di tali terne è quindi rappresentata da una funzione arbitraria di una variabile.

Ogni altra varietà a tre dimensioni ammette una sola terna principale di congruenze geodetiche o non ne ammette alcuna. In particolare ne ammettono una le V_3 a curvatura costante positiva (alla quale corrisponde una speciale forma canonica per il loro ds^2); non ne ammettono alcuna quelle a curvatura costante negativa.

Per la proprietà caratteristica delle terne considerate sei delle rotazioni, che ad esse competono sono nulle. Vedremo che delle altre tre una sola può essere variabile e perciò ripartiremo le V_3, che formano oggetto del nostro studio in due classi, assegnando alla I^a classe quelle, per le quali una rotazione è variabile, alla II^a quelle, le cui rotazioni sono tutte costanti.

Per queste ultime sono conseguentemente costanti le tre *anormalità*, cioè quelle semplici combinazioni lineari delle rotazioni, ciascuna delle quali eguagliata a o rappresenta la condizione necessaria e sufficiente perchè una congruenza della terna sia *normale*. Vedremo che un simultaneo cambiamento di segno di tutte le anormalità non ha importanza pel problema, che ci siamo proposti e per conseguenza (prescindendo dallo spazio euclideo, che del resto trova posto nella I^a classe) le V_3 della II^a classe si possono

(1) Cfr. Ricci, *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol XIX, ser 5^a, 2° sem., sedute del 20 febbraio e del 7 agosto 1910.

ripartire in tre sottoclassi assegnando alla 1ª quelle di cui due anormalità sono nulle e la terza è positiva; alla 2ª quelle, per le quali due anormalità sono positive e la terza è positiva o nulla; alla 3ª quelle per le quali due anormalità sono di segno opposto, mentre la terza è positiva o nulla.

Un'unica espressione canonica per il proprio ds^2 compete a tutte le varietà della Iª classe; ed altrettanto può dirsi per ciascuna delle tre sottoclassi, che costituiscono la IIª classe. Da ciò deriva la importanza della classificazione riportata sopra e la opportunità di riferirla anzichè ai valori delle anormalità delle congruenze principali, a proprietà equivalenti di quegli invarianti, che si considerano come più atti a caratterizzare intrinsecamente una V_3, voglio dire le sue curvature riemanniane principali. Se non che una maggiore semplicità di risultati consiglia di sostituire a queste le loro somme due a due, che a tenore di quanto ho proposto per le varietà in generale, dovrebbero dirsi *invarianti principali* per le V_3 (1).

Si può allora dire che:

a) La Iª classe è costituita dallo spazio euclideo e da tutte le V_3, per le quali un invariante principale ω_1 è costante e negativo, mentre gli altri due eguali e di segno opposto variano soltanto lungo le linee della congruenza principale corrispondente ad ω_1.

b) La IIª classe è costituita da tutte le V_3, i cui invarianti principali tutti costanti sono anche tutti positivi, ovvero, uno positivo e gli altri due negativi, o in fine due nulli e il terzo diverso da 0 e di segno qualunque.

In particolare appartengono alla sottoclasse 1ª tutte le V_3, i cui invarianti principali, eguali in valore assoluto, sono due positivi ed uno negativo; alla sottoclasse 2ª le V_3, i cui invarianti principali sono tutti positivi, e quelle, per le quali uno solo di tali invarianti è positivo, mentre degli altri (che sono insieme negativi o nulli) nessuno lo supera e uno al più lo eguaglia in valore assoluto: alla 3ª le V_3, che ammettono un invariante principale negativo e due nulli e quelle, che ammettono due invarianti principali negativi, ed uno positivo in valore assoluto minore di uno almeno degli altri due.

Tutte le V_3 della IIª classe ammettono un gruppo transitivo a tre parametri almeno di movimenti rigidi; a quattro parametri se due invarianti principali sono eguali; a sei, come è ben noto, se lo sono tutti e tre. Quelle di Iª classe, escluso lo spazio euclideo, non ammettono gruppi di movimenti rigidi (2).

(1) Cfr. Ricci. *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque.* Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIII, 1904, pag. 1235.

(2) Cfr. Ricci, *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni.* Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL, serie 3ª, tomo XII.

I metodi e i procedimenti, che applicherò in queste ricerche, sono quelli da me esposti nelle due Note sopra citate. Su di essi ritornerò brevemente e per commodità del lettore e per aggiungere alcune considerazioni, che troveranno poi applicazione. Essi, pure non giovandosi dell'algoritmo del Calcolo differenziale assoluto, si inspirano al suo concetto essenziale, secondo il quale le equazioni poste a base di ogni ricerca non sono legate alla scelta di particolari sistemi di variabili indipendenti. Questa viene invece suggerita opportunamente dai risultati dell'analisi e dall'intento di facilitarne gli ulteriori sviluppi e di rendere più semplici i risultati.

1. Si consideri la metrica di ogni V_3 come intrinsecamente definita da tre forme differenziali lineari indipendenti

$$\psi_i = \Sigma_r \lambda_{i/r}\, dx_r \ (^1),$$

che val quanto dire da una terna fondamentale di congruenze ortogonali ψ_i di equazioni differenziali

$$\psi_{i+1} = 0 \quad , \quad \psi_{i+2} = 0 .$$

Per il ds^2 della varietà si ha allora la espressione

$$ds^2 = \Sigma_i \psi_i^2 ,$$

e ben s'intende che, data la V_3, la terna fondamentale, che la definisce, è determinata a meno di una sostituzione ortogonale.

Per la definizione di una V_3 sono equivalenti due sistemi di forme fondamentali ψ_i e (ψ_i) sempre che da ogni ψ_i si passi alla corrispondente (ψ_i) mediante una trasformazione puntuale, o in altri termini, sempre che, posto

$$(\psi_i) = \Sigma_p (\lambda_{i/p})\, dy_p ,$$

sia integrabile il sistema

$$(1) \qquad (\lambda_{h/p}) = \Sigma_r \lambda_{h/r} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} .$$

Si ponga

$$\lambda_h^{(r)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_{h/p}}$$

$$(A) \qquad \frac{\partial \lambda_{h/r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h/r+2}}{\partial x_{r+1}} = \lambda(\sigma \lambda_h^{(r)} - \Sigma_i \varrho_{ih} \lambda_i^{(r)}) .$$

essendo

$$\sigma = \Sigma_i \varrho_{ii}$$

e designandosi con λ il determinante (diverso da 0) del sistema di forme ψ_i.

(1) Qui, come in seguito, ogni indice fisso indeterminato si intenderà capace di assumere ciascuno dei valori 1, 2, 3; e così ogni sommatorio si intenderà esteso ai valori 1, 2, 3 degli indici, cui si riferisce. Mi varrò pure della convenzione, per la quale si considerano come equivalenti gli indici, che differiscono per multipli di 3.

Le ϱ_{hk} definite mediante queste posizioni costituiscono il sistema completo degli invarianti differenziali di 1° ordine del sistema di forme ψ_i talchè, designando con (ϱ_{hk}) le loro espressioni relative alle (ψ_i) le equazioni

$$(\varrho_{hk}) = \varrho_{hk},$$

se non sono identicamente soddisfatte, sono da aggiungere alle (1). Nel caso opposto (che si verifica soltanto se le ϱ_{hk} e le (ϱ_{hk}) hanno valori costanti identici), le (1) costituiscono un sistema completamente integrabile e le (ψ_i) sono quindi equivalenti alle ψ_i.

Concludiamo che:

« Una terna fondamentale ortogonale e quindi la corrispondente V_3, « per la quale gli invarianti differenziali di 1° ordine, devono assumere « valori costanti dati, se esiste, risulta da questi valori completamente de- « terminata ».

Si consideri il triedro T avente per spigoli le tangenti positive alle linee delle congruenze fondamentali uscenti da uno stesso punto P e come senso positivo delle rotazioni intorno alla tangente (h) alla linea della congruenza ψ_h si assuma quello, che va dalla tangente $(h+1)$ verso la tangente $(h+2)$. L'invariante ϱ_{hk} rappresenta la componente secondo (h) della rotazione, che il triedro T subisce per uno spostamento infinitesimo del suo vertice nella direzione (k) [1].

Ricordiamo ancora che gli invarianti $\varrho_{h+1\,h+2}$ e $-\varrho_{h+2\,h+1}$ misurano le proiezioni sulla tangente (h) delle curvature geodetiche delle linee appartenenti alle congruenze ψ_{h+2} e ψ_{h+1} e che (scrivendo ϱ_h in vece di ϱ_{hh}), l'invariante

$$\alpha_h = \varrho_{h+1} + \varrho_{h+2} \tag{2}$$

si chiama, per la ragione già riferita, anormalità della congruenza ψ_h.

Designamo con ds_h l'elemento lineare delle linee di questa congruenza, con P_{hk} il complemento algebrico dell'elemento ϱ_{hk} nel determinante $||\varrho_{ij}||$ e poniamo

$$\omega_{hk} = -\frac{\partial \varrho_{hk+1}}{\partial s_{h+2}} - \frac{\partial \varrho_{hk+2}}{\partial s_{h+1}} + \sigma \varrho_{hk} - P_{hk} - \Sigma_i \varrho_{hi}\,\varrho_{ki}. \tag{3}$$

Una prima derivazione delle equazioni (A) e la successiva eliminazione delle derivate seconde delle $\lambda_{h/r}$, tenuto conto delle (A) conduce alle equazioni

$$\omega_{kh} = \omega_{hk}, \tag{B}$$

le quali, se sono identicamente soddisfatte, ci assicurano della completa

[1] Cfr. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.* Memorie della Reale Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. II, pag. 4.

integrabilità del sistema (A), nel quale si considerino come date le ϱ_{hk} e come incognite le $\lambda_{h/r}$, mentre nel caso opposto sono da aggiungere al sistema medesimo.

L'essere poi, in luogo delle (B), soddisfatte le

$$(B_1) \qquad \omega_{hk} = 0 \qquad (k \neq h)$$

è condizione necessaria e sufficiente perchè le congruenze ψ_h costituiscano nella varietà da esse definita una terna principale; di cui le ω_{hh} sono allora le curvature principali riemanniane.

2. Per quanto abbiamo sopra ricordato, l'annullarsi degli invarianti $\varrho_{h+1\,h+2}$ e $\varrho_{h+2\,h+1}$ è condizione necessaria e sufficiente perchè le congruenze ψ_h siano geodetiche. Tenuto conto di ciò e delle (2) se si esige che le congruenze fondamentali siano geodetiche, le equazioni (A) assumono la forma

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial \lambda_{h/r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h/r+2}}{\partial x_{r+1}} = \alpha_h (\lambda_{h+1/r+1}\, \lambda_{h+2/r+2} - \lambda_{h+1/r+2}\, \lambda_{h+2/r+1})$$

alle quali sono da aggiungere le (B_1) cioè, nel nostro caso, le

$$(\beta) \qquad \frac{\partial \varrho_h}{\partial s_{h+1}} = \frac{\partial \varrho_h}{\partial s_{h+2}} = 0,$$

se si esige che le congruenze ψ_h siano principali.

Nelle stesse ipotesi le (3) ci dànno per le curvature principali riemanniane ω_{hh} e per gli invarianti principali

$$\omega_h = \omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}$$

le espressioni

$$(4) \qquad \begin{cases} \omega_{hh} = \alpha_h \varrho_h - \varrho_{h+1}\, \varrho_{h+2} \\ \omega_h = 2\, \varrho_{h+1}\, \varrho_{h+2}\,. \end{cases}$$

E poichè dalle (2) seguono le

$$2\, \varrho_h = \alpha_{h+1} + \alpha_{h+2} - \alpha_h$$

alle (4) si potranno sostituire le

$$(4_1) \qquad \begin{cases} 2\, \omega_h = \alpha_h^2 - (\alpha_{h+2} - \alpha_{h+1})^2 \\ \omega_{hh} = \dfrac{1}{4} (\Sigma_i\, \alpha_i)^2 - \alpha_h^2 - \alpha_{h+1}\, \alpha_{h+2}\,. \end{cases}$$

Osserviamo che, come segue dalle equazioni (α), un cambiamento di segno comune a tutte le α_h (o a tutte le ϱ_h) importa soltanto cambiamento nel senso positivo delle linee delle congruenze principali.

Quanto alle equazioni (β), poichè, indicando con μ_h dei coefficienti indeterminati, esse equivalgono alle

$$(\beta') \qquad \frac{\partial \varrho_h}{\partial x_r} = \mu_h \lambda_{h/r} ,$$

esse ci dicono che ogni congruenza ψ_h, per la quale la corrispondente ϱ_h sia variabile, è normale.

Ne segue che una al più delle ϱ_h può essere variabile poichè dalla variabilità, per esempio, di ϱ_1 si conclude che è $\alpha_1 = 0$, cioè

$$(5) \qquad \varrho_2 = -\varrho_3 = c ,$$

con c costante, chè diversamente le $\lambda_{2/r}$ e le $\lambda_{3/r}$ risulterebbero proporzionali e quindi $\lambda = 0$; e che, se una ϱ_h è variabile, essa varia soltanto lungo le linee della corrispondente congruenza ψ_h.

Dalle (4) e (5) ricaviamo poi che

$$(6) \qquad \omega_1 = -2c^2 \quad , \quad \omega_3 = -\omega_2 = 2c\varrho_1$$

sono le espressioni degli invarianti principali della V_3 di questa classe, la quale (per $c = 0$) comprende, come caso particolare, lo spazio euclideo.

Se si osserva di più che, se si suppongono costanti tutte le ϱ_h, tali per le (4) risultano pure tutte le ω_h si conclude che:

Le varietà a tre dimensioni dotate di terne principali di congruenze geodetiche si ripartiscono nelle seguenti due classi:

I^a che comprende lo spazio euclideo e le V_3, per le quali un invariante principale è costante e negativo; mentre gli altri due eguali e di segno opposto variano soltanto lungo le linee della congruenza principale corrispondente all'invariante costante;

II^a costituita da varietà, i cui invarianti principali sono tutti costanti.

4. Ci occuperemo, per ora, soltanto delle varietà della I^a classe, che ci proponiamo di determinare intrinsecamente.

Come risulta dalle (α), se una congruenza ψ_h è normale, la corrispondente forma lineare ψ_h è il differenziale esatto di una funzione, che è naturale assumere come variabile indipendente. Nel caso nostro, essendo $\alpha_1 = 0$, e quindi la congruenza ψ_1 normale assumeremo

$$\psi_1 = dx_1$$

cioè

$$\lambda_{1/1} = 1 \quad , \quad \lambda_{1/2} = 0 \quad , \quad \lambda_{1/3} = 0 .$$

Sarà poi ϱ_1 funzione della sola x_1 e (le equazioni (β) e le (α) per $h = 1$ risultando identicamente soddisfatte) rimarranno da determinare ψ_2 e ψ_3 in modo che siano soddisfatte le equazioni (α) per $h = 2$ ed $h = 3$, nelle quali sia posto

$$\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = \varrho_1 - c \quad , \quad \alpha_3 = \varrho_1 + c ;$$

cioè le equazioni

$$\frac{\partial \lambda_{2/2}}{\partial x_3} - \frac{\partial \lambda_{2/3}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_{2/3}}{\partial x_1} - \frac{\partial \lambda_{2,1}}{\partial x_3} = (\varrho_1 - c)\,\lambda_{3/3}$$

$$\frac{\partial \lambda_{2/1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{2/2}}{\partial x_1} = -(\varrho_1 - c)\,\lambda_{3/2}$$

$$\frac{\partial \lambda_{3/2}}{\partial x_3} - \frac{\partial \lambda_{3/3}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_{3/3}}{\partial x_1} - \frac{\partial \lambda_{3/1}}{\partial x_3} = -(\varrho_1 + c)\,\lambda_{2/3}$$

$$\frac{\partial \lambda_{3/1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3/2}}{\partial x_1} = (\varrho_1 + c)\,\lambda_{2/2}\,.$$

Di queste la 1ª e la 4ª dànno

$$\lambda_{2/2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\,,\quad \lambda_{2/3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\quad;\quad \lambda_{3/2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\,,\quad \lambda_{3/3} = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\,,$$

con φ e ψ designando delle funzioni arbitrarie di x_1, x_2, x_3 indipendenti rispetto ad x_2 ed x_3, come segue dal dovere essere diverso da 0 il determinante λ, che per le (5) coincide collo jacobiano delle funzioni φ e ψ rispetto ad x_2 ed x_3. Possiamo dunque assumere $x_2 = \varphi$, $x_3 = \psi$ dopo di che rimangono da soddisfare le equazioni

$$\frac{\partial \lambda_{2/1}}{\partial x_2} = 0\,,\quad \frac{\partial \lambda_{2/1}}{\partial x_3} = -(\varrho_1 - c)\quad;\quad \frac{\partial \lambda_{3/1}}{\partial x_2} = \varrho_1 + c\,,\quad \frac{\partial \lambda_{3/1}}{\partial x_3} = 0\,,$$

le quali integrate dànno

$$\lambda_{1/1} = -(\varrho_1 - c)\,x_3 + \mu_1\quad,\quad \lambda_{3/1} = (\varrho_1 + c)\,x_2 + \nu_1\,,$$

μ_1 e ν_1 essendo simboli di funzioni arbitrarie di x_1, le quali però possono assumersi eguali a 0 sostituendo ad x_2 ed x_3 come nuove variabili

$$x_2 + \int \mu_1\,dx_1\quad,\quad x_3 + \int \nu_1\,dx_1\,.$$

Riassumendo abbiamo per le forme fondamentali ψ_1, ψ_2, ψ_3 e per il ds^2 delle varietà della I^a classe le seguenti espressioni:

$$\psi_1 = dx_1\,,\quad \psi_2 = dx_2 - (\varrho_1 - c)\,x_3\,dx_1\,,\quad \psi_3 = dx_3 + (\varrho_1 + c)\,x_2\,dx_1$$

$$(\alpha)\qquad ds^2 = \{1 + (\varrho_1 + c)^2\,x_2^2 + (\varrho_1 - c)^2\,x_3^2\}\,dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$
$$+ 2(c - \varrho_1)\,x_3\,dx_1\,dx_2 + 2(c + \varrho_1)\,x_2\,dx_1\,dx_3\,.$$

Per esse le espressioni degli invarianti principali son dati dalle (6) e quelle delle curvature principali riemanniane dalle

$$\omega_{11} = c^2 \quad , \quad \omega_{22} = -c^2 + 2c\varrho_1 \quad , \quad \omega_{33} = -c^2 - 2c\varrho .$$

Dunque di queste una è costante, positiva ed eguale in valore assoluto e di segno opposto alla media aritmetica delle altre due.

Per $c = 0$ si ha, come osservammo, lo spazio euclideo, nel quale la congruenza ψ_1 risulta normale, mentre le congruenze ψ_2 e ψ_3 hanno anormalità eguali, il cui valore è dato da ϱ_1.

Se poi si ricorda il significato cinematico delle ϱ_{hk} si riconosce che l'essere tra queste diversa da 0 la sola ϱ_1 importa che il triedro formato dalle tangenti alle linee delle congruenze principali uscenti da uno stesso punto subisca una semplice traslazione per uno spostamento infinitesimo del suo vertice secondo l'una o l'altra delle linee ψ_2 e ψ_3; mentre, se lo spostamento ha luogo lungo la linea ψ_1, esso ruota semplicemente intorno alla tangente a questa linea. Segue da tutto ciò e dall'essere ϱ_1 funzione soltanto di x_1, che le rette ψ_1 sono normali ad un sistema di piani paralleli Π, mentre le rette ψ_2 (e conseguentemente le ψ_3) parallele fra di loro in uno stesso piano Π ruotano di uno stesso angolo nel passare dall'uno all'altro di questi piani.

Ciò risulta anche dal fatto che per passare dalla espressione del ds^2 dello spazio euclideo, che si trae da quella riferita sopra ponendo $c = 0$, alla espressione canonica $dx^2 + dy^2 + dz^2$ basta porre

$$x = x_1 \ , \ y = \cos\theta\, x_2 + \sin\theta\, x_3 \ , \ z = \sin\theta\, x_3 - \cos\theta\, x_3 ,$$

essendo

$$\vartheta = -\int \varrho_1\, dx_1 .$$

Per lo stesso cambiamento di coordinate la espressione del ds^2 delle varietà di I^a classe assume invece, per c qualunque, la forma

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + c^2(y^2 + z^2)\, dx^2 + 2c\, dx \{(y \sin 2\theta + z \cos 2\theta)\, dy + (y \cos 2\theta - z \sin 2\theta)\, dz\} .$$

Ottica. — *Sulle ovali di Cartesio come curve aplanetiche di rifrazione* (1). Nota del Corrispondente O. TEDONE.

1. La curva chiamata dai geometri *ovale di Cartesio* è composta, come è noto, di due ovali distinte e possiede tre fochi reali, al finito, sul suo asse di simmetria, fochi che compaiono in modo perfettamente simmetrico nell'equazione razionale della curva. In questa Nota, di carattere elementare, ci proponiamo di determinare il comportamento di ciascuna delle coppie di fochi che si possono formare con i tre fochi della curva, dal punto di vista metrico ed ottico, rispetto a ciascuna delle ovali che compongono la curva stessa; comportamento che, come si vedrà, varia col variare della coppia di fochi che si considera e di ciascuna delle ovali (2).

2. PRINCIPIO DI MINIMO. *a*) « Si abbia una superficie σ di equazione « $z = z(x, y)$, separante due mezzi ottici i cui indici assoluti di rifrazione « sieno n_1 ed n_2. Sia, poi, P un punto fisso di coordinate (a_1, b_1, c_1) e Q « un altro punto fisso di coordinate (a_2, b_2, c_2). Allora, i valori *estremi* « di ciascuna delle espressioni

$$(1) \qquad L = n_1 r_1 + n_2 r_2, \qquad (1') \qquad L' = n_1 r_1 - n_2 r_2$$

« in cui

$$(2) \qquad \begin{cases} r_1 = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}, \\ r_2 = \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2}, \end{cases}$$

« dinotano le distanze dei punti P e Q da un punto O di σ, sono i va- « lori di L, o di L', che corrispondono a punti O di σ tali che sieno sod- « disfatte le equazioni

$$(3) \qquad z - z(x, y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

« ovvero le altre

$$(3') \qquad z - z(x, y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial L'}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L'}{\partial y} = 0.$$

(1) La ricca letteratura relativa all'ovale di Cartesio si può rilevare dal noto libro del Loria: *Ebene Kurven* (Leipzig, 1902, B. G. Teubner), pag. 174.

(2) Ne risulterà, fra l'altro, che alcune delle forme sotto le quali si suole scrivere l'equazione dell'ovale di Cartesio sono da ritenersi inesatte. Tali sono, p. es., le equazioni 32) e 33) della Memoria di Haentzschel, *Ueber ein orthogonales System von bizirkul. Kurven* ... (Jahresbericht des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin. Berlin, 1908) dalla quale Memoria abbiamo, del resto, ricavata la maniera di passare alla forma razionale dell'equazione della nostra curva.

« Per ciascuno di questi sistemi di equazioni, può accadere che esso abbia, « ovvero non abbia, soluzioni. E può anche accadere che le sue tre equa- « zioni sieno identicamente verificate quando lo sia la prima di esse. In « quest'ultimo caso i punti di σ soddisfano alla condizione $L = cost$, ovvero « $L' = cost.$, e chiameremo σ superficie *aplanetica di rifrazione* rispetto « alla coppia di punti P e Q. In ogni caso, se, per un punto O di σ, sono « soddisfatte le (3), ovvero le (3'), e si consideri PO come un raggio lumi- « noso uscente da P, supposto che questo raggio sia situato, o, almeno, « finisca con l'essere situato nel mezzo di indice n_1, possiamo ottenere il « raggio rifratto di PO con le seguenti regole:

« 1°) se sono soddisfatte le (3) e i punti P e Q sono situati da « bande opposte del piano tangente π in O a σ, il raggio rifratto di PO « è il raggio OQ;

« 2°) se sono soddisfatte le (3) e i punti P e Q sono situati dalla « stessa banda del piano tangente π, il raggio rifratto di PO è il simme- « trico di OQ rispetto al piano π;

« 3°) se sono soddisfatte le (3') e i punti P e Q giacciono dalla « stessa banda del piano π tangente a σ in O, il raggio rifratto di PO è « il prolungamento del raggio QO;

« 4°) se, in fine, sono soddisfatte le (3') ed i punti P e Q giacciono « da bande opposte del piano tangente π, il raggio rifratto di PO è il « simmetrico di OQ rispetto alla normale alla superficie σ, in O ».

Solo se siamo nel primo caso ed i raggi PO, OQ sieno contenuti per intero nei rispettivi mezzi di indici n_1 ed n_2, il principio precedente è contenuto nel *principio del minimo cammino ottico*. Nelle stesse ipotesi, se σ è una superficie aplanetica, rispetto alla coppia di punti P, Q, il punto Q è un'immagine reale di P. Se, invece, σ è aplanetica, il raggio PO è tutto contenuto nel mezzo di indice n_1 e siamo nel 3° caso, Q è immagine virtuale di P. In ogni altra ipotesi, Q non è, nè immagine reale, nè immagine virtuale di P.

b) « Se, nell'enunciato precedente, invece di supporre P fisso, si sup- « pone soltanto che P debba appartenere ad un piano α, allora i valori « estremi di L, o di L', corrispondono a punti P di α e a punti O di σ « tali che PO sia normale ad α e che, inoltre, sieno soddisfatte, ancora, « le equazioni (3), ovvero le (3'). Valgono, inalterate, le stesse regole di « prima per trovare il raggio rifratto di PO e le altre conclusioni, ed il « caso presente può considerarsi come quel caso particolare del precedente « in cui il punto P si allontani indefinitamente in direzione normale ad α.

c) « Potrebbe supporsi che si allontanino indefinitamente nella stessa « direzione, o in direzioni differenti, tutti e due i punti P e Q.

3 SUPERFICIE APLANETICHE DI RIFRAZIONE. — Si è visto che, se σ è una superficie aplanetica di rifrazione, rispetto ai punti P e Q, indicando

con c una costante, i suoi punti devono soddisfare all'una. o all'altra, delle due relazioni

$$(4) \qquad n_1 r_1 + n_2 r_2 = c \ , \qquad \text{ovvero} \qquad (4') \quad n_1 r_1 - n_2 r_2 = c .$$

E, per decidere se, dei due punti P e Q, uno possa considerarsi come immagine reale, o virtuale, dell'altro, bisogna, se occorre, dividere σ in parti in modo che i piani tangenti ad essa nei punti di ciascuna di queste parti, lascino i punti P e Q sempre dalla stessa banda, o sempre da bande opposte di σ, ed applicare, poi, i criterii precedenti.

Le superficie i cui punti soddisfano alla (4), ovvero alla (4'), sono, evidentemente, superficie di rotazione intorno alla retta PQ. Possiamo, quindi, limitare la nostra attenzione allo studio di una sezione meridiana.

Scegliamo, perciò, la retta PQ come asse x, sieno e_1 ed e_2, con $e_1 > e_2$, le ascisse di P e Q e limitiamoci a studiare la sezione della superficie prodotta dal piano xy. Notiamo, però, prima, che, se $n_1 > n_2$ si possono determinare un fattore k e due altri numeri ϱ ed e_3 in modo che

$$(5) \quad kn_1 = \sqrt{\varrho - e_2} \ , \quad kn_2 = \sqrt{\varrho - e_1} \ , \quad kc = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}$$

con $\varrho > e_1 , e_2 , e_3$ e le radici essendo considerate come positive. ϱ ed e_3 possono ritenersi determinati dalle equazioni

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\varrho - e_2}}{\sqrt{\varrho - e_1}} \ , \quad \frac{c}{n_1} = (e_1 - e_2)\frac{\sqrt{\varrho - e_3}}{\sqrt{\varrho - e_2}} .$$

Il parametro ϱ dipende, dunque, soltanto dall'indice di rifrazione relativo dei due mezzi separati da σ. Similmente, se $n_1 < n_2$, si possono determinare il fattore k e i due numeri ϱ ed e_3 in modo che

$$(5') \quad kn_1 = \sqrt{e_2 - \varrho} \ , \quad kn_2 = \sqrt{e_1 - \varrho} \ , \quad kc = (e_1 - e_2)\sqrt{e_3 - \varrho}$$

con $\varrho < e_1 , e_2 , e_3$ e si avrà adesso

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{e_2 - \varrho}}{\sqrt{e_1 - \varrho}} \ , \quad \frac{c}{n_1} = (e_1 - e_2)\frac{\sqrt{e_3 - \varrho}}{\sqrt{e_2 - \varrho}} .$$

Ciò posto, corrispondentemente al caso $n_1 > n_2$, l'equazione della curva, sezione meridiana della superficie aplanetica da studiare, si può scrivere

$$\alpha) \qquad \sqrt{\varrho - e_2}\sqrt{(x - e_1)^2 + y^2} \pm \sqrt{\varrho - e_1}\sqrt{(x - e_2)^2 + y^2} = \\ = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}$$

e, corrispondentemente al caso $n_1 < n_2$, si può scrivere

$$\beta) \qquad \sqrt{e_2 - \varrho}\,\sqrt{(x-e_1)^2+y^2} \pm \sqrt{e_1 - \varrho}\,\sqrt{(x-e_2)^2+y^2} = \\ = (e_1 - e_2)\sqrt{e_3 - \varrho}\,,$$

i segni $+$, o $-$, corrispondendo alle due diverse ipotesi (4) e (4′).

Senza limitare in alcun modo il nostro studio, come si vedrà in appresso, potremo sempre supporre che sia

$$(6) \qquad e_1 > e_2 > e_3\,.$$

Anzi, poichè le equazioni α) e β) restano inalterate aumentando $x, e_1, e_2, e_3, \varrho$ di una stessa quantità possiamo sempre supporre di aver scelto l'origine degli assi in modo che sia

$$(7) \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0 \qquad \text{donde} \qquad e_1 > 0\,,\ e_3 < 0\,.$$

Possiamo considerare, per dippiù, le e come radici di un'equazione della forma

$$(8) \qquad \varphi(s) = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

con

$$(8') \quad \begin{cases} \dfrac{g_2}{4} = -(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) = e_1^2 - e_2 e_3 = e_2^2 - e_3 e_1 = e_3^2 - e_1 e_2\,, \\ \dfrac{g_3}{4} = e_1 e_2 e_3\,. \end{cases}$$

Nel seguito interpreteremo anche e_3 e ϱ come ascisse di due punti dell'asse x ed indicheremo con E_1, E_2, E_3 i punti di ascisse e_1, e_2, e_3 e con r_i il raggio vettore che dal punto E_i va ad un punto qualunque del piano della curva.

4. Forme principali dell'equazione dell'ovale di Cartesio. — Dalle identità

$$(\varrho - e_2) r_1^2 - (\varrho - e_1) r_2^2 = (e_1 - e_2)[x^2 + y^2 - \varrho(2x + e_3) - e_1 e_2] = \\ = (\sqrt{\varrho - e_2}\, r_1 + \sqrt{\varrho - e_1}\, r_2)(\sqrt{\varrho - e_2}\, r_1 - \sqrt{\varrho - e_1}\, r_2) = \\ = -(\sqrt{e_2 - \varrho}\, r_1 + \sqrt{e_1 - \varrho}\, r_2)(\sqrt{e_2 - \varrho}\, r_1 - \sqrt{e_1 - \varrho}\, r_2)$$

si ricava subito che, se vale la α), sia che in essa si consideri il segno $+$, o il segno $-$, è

$$(9) \qquad 2\sqrt{\varrho - e_3}\,\sqrt{\varrho - e_2}\, r_1 = (x-\varrho)^2 + y^2 - \varrho^2 + 2e_1\varrho + e_1^2 + e_2 e_3\,,$$

mentre, se vale la β), qualunque sia il segno che in essa si consideri, è

$$(9') \qquad 2\sqrt{e_3 - \varrho}\,\sqrt{e_2 - \varrho}\, r_1 = -[(x-\varrho)^2 + y^2 - \varrho^2 + 2e_1\varrho + e_1^2 + e_2 e_3]\,.$$

Elevando a quadrato, tanto la (9) che la (9′) conducono alla stessa equazione razionale che si può porre sotto la forma

$$\text{A)} \qquad \left\{(x-\varrho)^2+y^2-\frac{1}{4}\varphi'(\varrho)\right\}^2-\varphi(\varrho)(2x+\varrho)=0\,,$$

ovvero, ordinata secondo le potenze di ϱ,

$$\text{B)} \qquad -4\varrho^2y^2+\left[g_3-4x\left(x^2+y^2-\frac{g_2}{4}\right)\right]\varrho+$$
$$+\left(x^2+y^2+\frac{g_2}{4}\right)^2+2g_3x=0.$$

Seguendo la nomenclatura adoperata dai geometri, chiameremo ovale di Cartesio, tutta intera la curva rappresentata dall'equazione A), o B).

Queste equazioni contengono le ascisse e_1, e_2, e_3 in modo simmetrico e restano, quindi, inalterate, eseguendo, su questi numeri, delle permutazioni arbitrarie. Queste permutazioni sono, quindi, lecite anche sulle (9) e (9′).

Scegliendo come polo uno qualunque dei punti E_i, come asse polare l'asse x e chiamando ω_i la corrispondente anomalia, si trova, subito, l'equazione polare dell'ovale di Cartesio sotto la forma

$$\text{C)} \qquad r_i^2+2\left[(e_i-\varrho)\cos\omega_i-\sqrt{\varrho-e_{i+1}}\,\sqrt{\varrho-e_{i+2}}\right]r_i+R_i^2=0$$

in cui si è posto

$$R_i^2=(e_i-e_{i+1})(e_i-e_{i+2}).$$

L'equazione C) si può dedurre dalla (9) e vale per il caso di $\varrho>e_1$. Per il caso $\varrho<e_3$ l'equazione corrispondente alla C) si può ricavare dalla (9′) e si ottiene dalla C) stessa sostituendo

$$-\sqrt{e_{i+1}-\varrho}\,\sqrt{e_{i+2}-\varrho} \quad \text{a} \quad \sqrt{\varrho-e_{i+1}}\,\sqrt{\varrho-e_{i+2}}\,.$$

Tenendo presente che il primo membro della A) è di secondo grado in ϱ, dividendo questo primo membro per $\varphi(\varrho)$ e scomponendo quindi la funzione di ϱ così risultante in frazioni elementari, si trova subito che la equazione dell'ovale di Cartesio si può anche scrivere

$$\text{D)} \qquad \frac{S_1^2}{R_1^2(\varrho-e_1)}+\frac{S_2^2}{R_2^2(\varrho-e_2)}+\frac{S_3^2}{R_3^2(\varrho-e_3)}=0$$

nella quale si è posto

$$\text{(10)} \qquad S_i=(x-e_i)^2+y^2-R_i^2\,.$$

5. Proprietà principali dell'ovale di Cartesio. — L'ovale di Cartesio è una curva algebrica di quarto ordine avente una cuspide in cia-

scuno dei punti ciclici del suo piano. Le tangenti cuspidali, in questi punti, si segano nel *foco straordinario* ($x = \varrho$, $y = 0$) della curva.

Da ciascuno dei punti ciclici si possono condurre alla curva, ancora, tre tangenti in punti al finito. Dei nove punti d'intersezione (fochi ordinarii della curva), quelli reali sono i tre punti E_1 , E_2 , E_3 dell'asse x.

La serie delle ovali di Cartesio confocali, delle curve, cioè, aventi gli stessi fochi reali e, quindi, anche gli stessi fochi immaginarii, è rappresentata da ciascuna delle equazioni A), B), D). Facendo variare il foco straordinario si hanno le diverse curve della serie.

Le curve reali della serie precedente si dividono in due sistemi: uno si ottiene facendo variare ϱ fra e_1 e $+\infty$, l'altro facendo variare ϱ fra $-\infty$ ed e_3. Scambiando il senso positivo dell'asse x i due sistemi di curve si scambiano fra loro. A valori di ϱ compresi fra e_3 ed e_1 corrispondono curve immaginarie.

Per un punto del piano passa una curva appartenente a ciascuno dei sistemi precedenti e queste due curve s'incontrano ad angolo retto. Due curve dello stesso sistema non hanno, quindi, punti reali in comune.

Per $\varrho = e_i$ ($i = 1 , 2 , 3$) la curva si riduce al cerchio C_i di equazione

$$(x - e_i)^2 + y^2 - R_i^2 = 0$$

contato due volte. I cerchi C_1 e C_3 sono reali; appartengono come curve limiti a ciascuno dei due sistemi di curve reali che compongono la serie confocale e s'incontrano, quindi, ad angolo retto. C_2 è immaginario.

Un'inversione rispetto a ciascuno dei cerchi C_i trasforma ciascuna delle curve della serie e, quindi, la serie in se stessa.

Ogni curva appartenente al sistema $\varrho > e_1$ è composta di due ovali distinte inverse una dell'altra rispetto al cerchio C_1 e, quindi, una interna, l'altra esterna allo stesso cerchio. Ciascuna di queste ovali incontra ortogonalmente il cerchio C_3; ha l'asse x per asse di simmetria ed è situata nella regione del piano in cui $x > -\frac{\varrho}{2}$. Proprietà analoghe valgono per le curve del sistema $\varrho < e_3$ e, per enunciarle, basta scambiare, negli enunciati precedenti, E_1 e C_1 con E_3 e C_3.

La serie di curve confocali formata dalle ovali di Cartesio è il doppio sistema di linee ortogonali che, nella rappresentazione conforme determinata dalla funzione di variabile complessa

$$x' + iy' = P(x + iy) ,$$

P essendo la funzione ellittica di Weierstrass con invariante reale e positivo, corrisponde al doppio sistema ortogonale formato dalle rette $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$.

6. Intersezioni della curva con l'asse x. — Ci riferiremo, d'ora in poi, soltanto ad una curva del sistema $\varrho > e_1$. L'equazione da cui dipende la determinazione delle intersezioni di questa curva con l'asse x è un'equazione di quarto grado riducibile quando si suppongano note le quantità $\sqrt{\varrho - e_1}$. Queste intersezioni si possono ottenere, facilmente ed in conformità alle diverse proprietà metriche di definizione della curva stessa, cercando i punti dell'asse x che soddisfino alle condizioni

$$(11)\qquad \sqrt{\varrho - e_2}\,(x - e_1) \pm \sqrt{\varrho - e_1}\,(x - e_2) = \pm (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}\,.$$

Chiamando x_1, x_2, x_3, x_4 i valori di x così determinati e supponendoli ordinati per ordine di grandezza decrescente, avremo

$$(12)\qquad \begin{cases} x_1 = \varrho + \sqrt{(\varrho - e_3)(\varrho - e_2)} + \sqrt{(\varrho - e_1)(\varrho - e_3)} + \sqrt{(\varrho - e_2)(\varrho - e_1)}, \\ x_2 = \varrho + \sqrt{(\varrho - e_3)(\varrho - e_2)} - \sqrt{(\varrho - e_1)(\varrho - e_3)} - \sqrt{(\varrho - e_2)(\varrho - e_1)}, \\ x_3 = \varrho - \sqrt{(\varrho - e_3)(\varrho - e_2)} + \sqrt{(\varrho - e_1)(\varrho - e_3)} - \sqrt{(\varrho - e_2)(\varrho - e_1)}, \\ x_4 = \varrho - \sqrt{(\varrho - e_3)(\varrho - e_2)} - \sqrt{(\varrho - e_1)(\varrho - e_3)} + \sqrt{(\varrho - e_2)(\varrho - e_1)}. \end{cases}$$

Da queste formole ricaviamo

$$x_1 - e_1 = (\sqrt{\varrho - e_1} + \sqrt{\varrho - e_2})(\sqrt{\varrho - e_1} + \sqrt{\varrho - e_3}),$$

$$x_2 - e_1 = (\sqrt{\varrho - e_1} - \sqrt{\varrho - e_2})(\sqrt{\varrho - e_1} - \sqrt{\varrho - e_3}),$$

e quindi

$$(13)\qquad (x_1 - e_1)(x_2 - e_1) = R_1^2.$$

In modo analogo si mostrerebbe che

$$(13')\qquad \begin{cases} (x_3 - e_1)(x_4 - e_1) = R_1^2; \\ (x_1 - e_2)(x_3 - e_2) = R_2^2 \quad , \quad (x_2 - e_2)(x_4 - e_2) = R_2^2; \\ (x_1 - e_3)(x_4 - e_3) = R_3^2 \quad , \quad (x_2 - e_3)(x_3 - e_3) = R_3^2 \end{cases}$$

dalle quali si deduce che le due coppie di punti (x_1, x_2), (x_3, x_4) sono coppie di punti inversi rispetto a C_1, che i punti di ciascuna delle coppie (x_1, x_3), (x_2, x_4) sono inversi rispetto a C_2 e che quelli di ciascuna delle coppie (x_1, x_4), (x_2, x_3) sono inversi rispetto a C_3.

7. Le ovali di Cartesio come curve aplanetiche di rifrazione. — L'equazione dell'ovale di Cartesio, sotto una qualunque delle forme A), B), D), contiene simmetricamente e_1, e_2, e_3. Per conseguenza la totalità dei punti reali che costituiscono la detta curva contiene i punti reali dei diversi luoghi di punti rappresentati dalla diverse equazioni

$$(14)\qquad \sqrt{\varrho - e_{i+2}}\,r_{i+1} \pm \sqrt{\varrho - e_{i+1}}\,r_{i+2} = \pm (e_{i+1} - e_{i+2})\sqrt{\varrho - e_i}\,,$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Non a tutte le equazioni precedenti corrispondono, però, punti reali. Notando, infatti, che

$$\sqrt{\varrho - e_3} > \sqrt{\varrho - e_2} > \sqrt{\varrho - e_1}$$

per nessun punto reale può essere

$$\sqrt{\varrho - e_3}\, r_2 + \sqrt{\varrho - e_2}\, r_3 = (e_2 - e_3)\sqrt{\varrho - e_1}\,,$$

giacchè da essa ne verrebbe

$$\sqrt{\varrho - e_1}\,(r_2 + r_3) < \sqrt{\varrho - e_3}\, r_2 + \sqrt{\varrho - e_2}\, r_3 = (e_2 - e_3)\sqrt{\varrho - e_1}\,,$$
$$r_2 + r_3 < e_2 - e_3\,.$$

In modo analogo si dimostra che non possono essere soddisfatte da punti reali le equazioni

$$\sqrt{\varrho - e_1}\, r_2 - \sqrt{\varrho - e_2}\, r_1 = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}\,,$$
$$\sqrt{\varrho - e_1}\, r_3 - \sqrt{\varrho - e_3}\, r_1 = (e_1 - e_3)\sqrt{\varrho - e_2}\,,$$

giacchè, dalla prima, discenderebbe

$$\sqrt{\varrho - e_2}\,(r_2 - r_1) > \sqrt{\varrho - e_1}\, r_2 - \sqrt{\varrho - e_2}\, r_1 = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}\,,$$
$$r_2 - r_1 > e_1 - e_2\,,$$

e, dalla seconda,

$$\sqrt{\varrho - e_2}\,(r_3 - r_1) > \sqrt{\varrho - e_1}\, r_3 - \sqrt{\varrho - e_3}\, r_1 = (e_1 - e_3)\sqrt{\varrho - e_2}\,,$$
$$r_3 - r_1 > e_1 - e_3\,.$$

In corrispondenza ai due fochi E_1, E_2 possono, quindi, essere soddisfatte da punti reali soltanto le due equazioni

$$(14)\qquad \begin{cases} \sqrt{\varrho - e_2}\, r_1 + \sqrt{\varrho - e_1}\, r_2 = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}\,, \\ \sqrt{\varrho - e_2}\, r_1 - \sqrt{\varrho - e_1}\, r_2 = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}\,; \end{cases}$$

in corrispondenza ai due fochi E_1, E_3, possono essere soddisfatte soltanto le due relazioni

$$(14')\qquad \begin{cases} \sqrt{\varrho - e_3}\, r_1 + \sqrt{\varrho - e_1}\, r_3 = (e_1 - e_3)\sqrt{\varrho - e_2}\,, \\ \sqrt{\varrho - e_3}\, r_1 - \sqrt{\varrho - e_1}\, r_3 = (e_1 - e_3)\sqrt{\varrho - e_2} \end{cases}$$

e, corrispondentemente ai due fochi E_1, E_2, soltanto le due equazioni

$$(14'')\qquad \begin{cases} \sqrt{\varrho - e_2}\, r_3 - \sqrt{\varrho - e_3}\, r_2 = (e_2 - e_3)\sqrt{\varrho - e_1}\,, \\ \sqrt{\varrho - e_3}\, r_2 - \sqrt{\varrho - e_2}\, r_3 = (e_2 - e_3)\sqrt{\varrho - e_1}\,, \end{cases}$$

la prima equazione di ciascun gruppo essendo soddisfatta dai punti dall'ovale interna a C_1, la seconda dai punti dell'ovale esterna.

Rispetto all'ovale più grande, dei due fochi E_1, E_2, uno è immagine virtuale dell'altro; mentre, rispetto all'ovale più piccola nessuno di essi può essere considerato come immagine reale, o come immagine virtuale dell'altro. E, se O è un punto di questa ovale, il raggio rifratto di E_1O è il simmetrico, rispetto alla tangente alla curva in O, del raggio OE_2.

Quando si passi a considerare il comportamento ottico delle due ovali rispetto alla coppia di fochi E_3, E_1, ovvero E_3, E_2, bisogna considerare separatamente le due parti in cui ciascuna ovale è divisa dal cerchio C_3. Rispetto alle parti di queste ovali che sono esterne a C_3, i fochi E_3, E_1 si comportano, precisamente, come i fochi E_2, E_1. Rispetto alla parte dell'ovale più piccola, interna a C_3, E_1 è immagine reale di E_3. Invece, se O è un punto dell'ovale maggiore, interno a C_3, il raggio rifratto di E_3O è il simmetrico di OE_1, rispetto alla normale, in O, alla linea.

I due fochi E_3, E_2 si comportano allo stesso modo rispetto alle due ovali e, precisamente, nello stesso modo nel quale si comportano rispetto al cerchio C_1 di cui costituiscono una coppia di punti aplanetici. Solo è da osservare che, rispetto a C_1, oltre alla coppia ricordata, conformemente ad un teorema di Weierstrass, ve ne sono infinite altre disposte su due cerchi concentrici a C_1, uno interno e l'altro esterno a C_1 stesso. Per ciascuna delle parti di ciascuna delle ovali, esterna a C_3, E_2 è immagine virtuale di E_3. E, se, infine, O è un punto qualunque della curva, interno a C_3, il raggio rifratto di E_3O è il simmetrico di OE_2 rispetto alla normale alla curva in O.

8. Caso particolare in cui un foco è all'infinito. — Nel caso particolare accennato la curva aplanetica (ci limitiamo ancora alla considerazione di una sezione normale della superficie aplanetica corrispondente) rispetto al punto all'infinito P e ad un punto Q, al finito, è il luogo dei punti tali che la somma, o la differenza, delle distanze di un punto della curva da un certo piano fisso α e dal punto Q, moltiplicate per due costanti positive n_1, n_2, rispettivamente, sia costante. Scegliendo come asse x la retta condotta per Q normalmente ad α, chiamando con e l'ascissa di Q e spostando, se occorre, parallelamente a se stesso il piano α, quando l'origine delle coordinate si scelga in modo oppurtuno, l'equazione del luogo si può scrivere sotto la forma

$$(15) \qquad \pm n_1\left(x - \frac{n_2^2}{n_1^2}e\right) + n_2\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 0,$$

n_1 essendo l'indice di rifrazione assoluta del mezzo in cui si trova il foco

infinitamente lontano. Dall'equazione precedente risulta subito

$$(16) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - 1} = e^2 \quad , \quad \lambda = \frac{n_2}{n_1} ,$$

la quale è una conica di eccentricità $\frac{1}{\lambda} = \frac{n_1}{n_2}$.

Lasciando fissi i fochi e facendo variare l'indice relativo di rifrazione $\frac{n_2}{n_1}$ dei due mezzi si ottiene la serie delle coniche a centro confocali.

Chimica vegetale. — *Sulla influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante.* Nota II del Socio G. Ciamician e di C.ª Ravenna.

Nella nostra prima Nota su questo argomento (1) abbiamo descritto alcune esperienze dirette a mettere in rilievo l'influenza che alcune sostanze organiche esercitano sullo sviluppo delle piantine segnatamente di fagioli germogliati e cresciuti sul cotone idrofilo. Le prove fatte allora si limitarono al nitrile mandelico in comparazione coll'acido cianidrico e l'amigdalina e ad alcuni alcaloidi: anzitutto la nicotina ed inoltre la morfina, la stricnina e la caffeina. I risultati migliori si ebbero col nitrile mandelico e con la nicotina; peraltro anche queste esperienze non furono esaurienti perchè le coltivazioni vennero troncate prima che le piantine avessero raggiunta la maturità, volendo esaminare a tempo debito il loro contenuto in relazione alle sostanze somministrate. Appariva però necessario ripetere le prove con queste sostanze ed estenderle a molte altre per vedere le differenze di contegno che le piantine di fagioli presentavano ai diversi interventi chimici. Appariva pure opportuno non limitare le esperienze ai soli fagioli ma estenderle ad altre piante. A questo proposito vogliamo dire subito che i fagioli e massime quelli comuni dai semi screziati in rosso si mostrarono, fra le piante da noi esaminate, le più propizie a tali esperienze; il mais, le barbabietole e il tabacco sono, a parità di condizioni, assai meno sensibili alle sostanze da noi sperimentate; i lupini, se anche ne risentirono l'azione, non modificarono mai il loro abito.

Le sostanze sperimentate furono, oltre al citato nitrile mandelico, gli alcoli benzilico e salicilico (saligenina); gli acidi benzoico e salicilico allo stato di sali potassici; la vanillina, l'eugenolo e il tannino; gli acidi amidati alanina ed asparagina; l'acido urico e la xantina allo stato di sali potassici in comparazione con la caffeina; la piridina e la piperidina in comparazione

(1) Questi Rendiconti, vol. 26, I, pag. 3 (1917).

con la citata nicotina e poi la chinina, la stricnina e la morfina. Per le prove di germinazione abbiamo impiegato inoltre la cocaina e l'atropina ed anche l'essenza di senape.

Le prove di germinazione furono eseguite ponendo i semi in germinatoi di ferro zincato sul cotone, coperti con carta da filtro, e bagnandoli con le relative soluzioni a 1 per mille. Il nitrile mandelico, l'eugenolo e l'essenza di senape impediscono assolutamente la germinazione dei semi di fagioli; le altre sostanze esaminate si mostrarono invece meno velenose per i semi germinanti ed anzi con alcune di esse si ebbe un anticipo più o meno marcato in comparazione coi semi bagnati con acqua. Questo anticipo si verificò segnatamente con l'alanina e con la stricnina e poi in minor grado con la cocaina, l'atropina, la chinina e la morfina. Con la nicotina (1) e la caffeina germinò solo una parte dei semi; così pure si comportarono, ma in grado peggiore, con l'alcool benzilico, col benzoato e col salicilato potassico. La vanillina, il tannino come pure l'asparagina si mostrarono indifferenti, cioè la germinazione non venne nè impedita nè anticipata rispetto ai semi testimoni.

L'azione antitetica fra il nitrile mandelico e la stricnina, già notata lo scorso anno, potè essere ulteriormente confermata poichè bagnando i semi di fagioli e massime di lupini contemporaneamente con le due sostanze, alcuni germinarono e precisamente il 3 per cento dei fagioli ed il 26 per cento di lupini. Questa azione antitetica si manifestò anche ulteriormente sulle piantine già sviluppate.

Per studiare l'influenza delle diverse sostanze sulle piantine germinate si cominciò a somministrare le relative soluzioni all'1 per mille dopo alcuni giorni quando esse avevano raggiunto un adeguato sviluppo come venne fatto l'anno scorso. Abbiamo notato che le piantine, che vivevano nei germinatoi di ferro zincato, sopportavano le sostanze tossiche meglio di quelle crescenti in germinatoi di vetro. Abbiamo voluto accertare un'eventuale influenza dello zinco, che risultò positiva. Facendo uso di germinatoi di vetro ed aggiungendo alla soluzione impiegata l'1 per mille di solfato di zinco, si ebbe col nitrile mandelico e con la nicotina una maggior resistenza delle piantine al veleno.

All'infuori del nitrile mandelico, le altre sostanze aromatiche impiegate non esercitano un'influenza specifica sulle piantine di fagioli nel senso di modificarne l'aspetto esteriore. Il nitrile invece produsse quelle caratteristiche variazioni nella forma e nel colore più cupo delle foglie già osservate e descritte l'anno scorso. Peraltro questa volta abbiamo potuto notare

(1) L'anno scorso eseguendo la prova con la nicotina in germinatoio di vetro, fu osservato che nessun seme potè germinare, a differenza di quanto è avvenuto coi germinatoi zincati. Abbiamo potuto dimostrare che lo zinco esercita un'azione antitossica tanto sulla nicotina come su altre sostanze.

che nell'ulteriore sviluppo delle piantine questi caratteri vanno scomparendo, in modo che esse tendono ad assumere l'aspetto normale, che raggiungono con la maturità.

La *saligenina* produce da principio un rallentamento di sviluppo ed un colore più cupo nelle foglie, ma in seguito la pianta assume l'aspetto normale.

Coll'*alcool benzilico* invece si osservano nei fagioli e massime nei lupini segni di sofferenza, che peraltro non impediscono l'ulteriore sviluppo.

Analogamente si comportano le piantine coi sali potassici degli acidi *benzoico* e *salicilico*, manifestando da principio qualche sofferenza, che peraltro potè essere superata alternando il trattamento con la soluzione nutritizia.

L'*eugenolo* si mostrò decisamente dannoso nel senso che attaccò la parte basale del fusto e le radici; poche piantine poterono essere mantenute in vita per qualche tempo.

La *vanillina* invece non esercita nessuna influenza nociva; le piantine si svilupparono normalmente e così pure col *tannino*.

Gli acidi amidati *alanina* e *asparagina*, come era da attendersi, agiscono favorevolmente; con la seconda si nota da principio un più cupo colore delle foglie.

I risultati più interessanti si ebbero peraltro con gli *alcaloidi* e sopra tutto con la *nicotina*, sperimentando sui fagioli con le soluzioni dei rispettivi tartarati all'1 per mille. Si può dire che tutti gli alcaloidi vegetali propriamente detti, finora esaminati, esercitano un'azione venefica sulle piantine di fagioli, mentre che invece la *piridina* e la *piperidina* producono soltanto un colore più cupo delle foglie, ma con accrescimento normale e sviluppo rigoglioso. Assai interessante a questo proposito riesce la comparazione della *caffeina* con la *xantina* e l'*acido urico*. La prima è per le piantine di fagioli un deciso veleno; dopo due giorni di inaffiamento con la soluzione a 1 per mille si seccano le foglie e le piantine muoiono rimanendo i fusti eretti, mentre la xantina e così pure l'acido urico adoperati in forma di sali potassici determinano uno sviluppo rigoglioso e normale senza alcuna sofferenza. Questo fatto apparisce assai rimarchevole quando si pensi che la caffeina è la trimetilxantina: la presenza di metili può determinare dunque anche nelle piante una intensa azione fisiologica di cui il composto fondamentale è del tutto sprovvisto. E mentre finora, da quelli che considerano gli alcaloidi come inutilità organiche escrementizie si riteneva che i gruppi metilici, che tanto sovente si riscontrano nei prodotti vegetali, fossero da considerarsi come un mezzo di protezione per smussare per così dire i gruppi troppo reattivi come gli ossidrili o gli immini, da queste esperienze risulterebbe invece proprio il contrario. Apparisce però assai promettente l'ulteriore proseguimento di questi studî affine di comparare l'azione sulle piantine

di fagioli dei più importanti composti organici fondamentali, con quella dei loro derivati alchilici.

Fra gli alcaloidi sperimentati, il meno velenoso per le piantine di fagioli è la *morfina*, che determina fenomeni tossici poco rimarchevoli; vengono in seguito la *chinina*, che fa appassire la base del fusto per cui le piantine si piegano e muoiono, e poi la *stricnina*, che, da principio, esercita un'azione favorevole, ma che poi determina la caduta delle foglie per cui le piantine periscono. È rimarchevole che l'azione antagonistica fra la stricnina ed il nitrile mandelico, già accennata per la germinazione dei semi, si manifesti anche con le piantine, le quali, in germinatoio di vetro, si mantengono più a lungo in vita per azione contemporanea delle due sostanze, che impiegandole separatamente.

La *nicotina* ha sulle piantine di fagioli un'azione marcatamente tossica che in germinatoio di vetro le fa perire in pochi giorni; in germinatoi di zinco il veleno è meglio sopportato, e lasciando la pianta in vita determina una modificazione assai rimarchevole nel loro aspetto esteriore, che si manifesta in un ornamentale albinismo delle prime foglie composte. Come venne osservato anche l'anno scorso, le prime foglie semplici, che hanno un colore più carico, dopo alcuni giorni si increspano ai bordi e mentre su di esse compaiono delle bollosità, finiscono col cadere. Le foglie composte invece che spuntano successivamente, si sviluppano quasi normali, ma presentano ai bordi in modo assai caratteristico il fenomeno di albinismo. Le piantine assumono un aspetto assai ornamentale, che le fa somigliare a certe piante normalmente albicate, come ad esempio, la *Pervinca argentata*, l'*Ilex aquifolium* ed altre simili. Pare probabile da studî recenti [1] che l'albinismo sia dovuto anche in questi casi all'azione di certe sostanze tossiche provenienti da parassiti che si formerebbero normalmente nelle piante che presentano questi caratteri. L'anomalia peraltro non persiste nelle piantine di fagioli: le ulteriori foglie composte non sono più albicate ed i soggetti acquistano a poco a poco l'aspetto normale. Si osserva inoltre, coltivando le piantine in vasi sulla sabbia, che le foglie screziate da principio, perdono l'albinismo e diventano normali.

Dai fatti ora esposti apparisce assai probabile quello che l'anno scorso venne già accennato e cioè che gli alcaloidi abbiano anche nelle piante una funzione ancora ignota, ma bene determinata, che potrebbe esser quella di ormoni vegetali [2]. Le diverse specie di piante giovandosi pure di prodotti primitivi indifferenti di rifiuto, ne trasformerebbero la costituzione in modo

[1] Vedi Pantanelli, 3. *Studio sull'albinismo nel regno vegetale*, Malpighia, vol. XVII, pag. XI (1903).

[2] Questo modo di considerare l'azione degli alcaloidi sarebbe conforme alle vedute del Langley.

da renderli adatti alle funzioni specifiche a cui devono servire, similmente a quanto avviene negli animali, che ad esempio dalla tirosina producono l'adrenalina delle capsule soprarenali. E però si comprenderebbe che dai composti più semplici, come la piridina, le piante producano gli alcaloidi più complessi e come dalla xantina indifferente ed innocua, i suoi derivati metilati, dotati di peculiari azioni fisiologiche.

Riguardo poi alla possibilità che hanno le piante di sbarazzarsi di sostanze inutili o dannose, riferiamo infine che inoculando in giovani piante di mais, cresciute in piena terra, nel modo consueto i tartarati di piridina e di nicotina e tenendo racchiusa la parte superiore della pianta in un pallone le cui pareti erano bagnate con acido solforico diluito, abbiamo potuto dimostrare che i due alcaloidi trasudano attraverso le foglie. Alle piante non mancano però sistemi di eliminazione e se in esse si rinvengono sostanze molto attive, come gli alcaloidi, ciò significa, a nostro avviso, che le piante le producono a scopo determinato.

Ci è grato infine porgere i nostri ringraziamenti in modo particolare alla dott. Angela Puricelli e alla signorina Paolina Cicognari per l'efficace collaborazione che ci prestarono nell'esecuzione di queste esperienze.

Matematica. — *Hamiltoniani e gradienti di hamiltoniani e di gradienti laplassiani parametri differenziali.* Nota III di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

1. In addizione a quanto ho sviluppato nelle mie due precedenti Note (1) sull'argomento di cui nel titolo della presente, tratto qui il caso nel quale in luogo di una funzione scalare semplice U delle $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ (mi riferisco, ben inteso, circa le definizioni e le notazioni, a quanto venne fatto precedentemente) si abbia una funzione F di una, o più, funzioni U. In tal caso, rammentando che ∇_Ω e G_Ω si comportano, rispetto al prodotto di due funzioni scalari, come delle derivate ordinarie, il che dà luogo alla

$$(1) \qquad \nabla_\Omega F(U) = \frac{dF(U)}{dU} \nabla_\Omega U \,.\, . \quad G_\Omega F(U) = \frac{dF(U)}{dU} G_\Omega U \,,$$

si arriva alla relazione

$$(2) \qquad \nabla_\Omega G_\Omega F(U) = (-1)^{\varrho\varrho'} \frac{d^2F}{dU^2} \nabla_\Omega U \,.\, G_\Omega U + \frac{dF}{dU} \nabla_\Omega G_\Omega U$$

ed all'analoga che da questa si deduce scambiandovi G con ∇.

(1) Cfr. questi Rend., fasc. I [tale Nota viene indicata con (H di G, I)] e II, dicembre 1917.

Nella (2) si vede far comparsa il prodotto dell'hamiltoniano pel gradiente di una funzione scalare U. e, nell'analoga di cui si è or ora parlato, il prodotto invertito, la cui forma esplicita, quando si tengano presenti quelle di $\nabla_\Omega U$ e $G_\Omega U$ è, pel $\nabla_\Omega U \,.\, G_\Omega U$:

$$(3) \qquad (-1)^{\rho\rho'} \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} \mid E_i \cdot \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\partial U}{\partial \omega_i} E_i = \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{\partial U}{\partial \omega_i} \right)^2 ,$$

e $(-1)^{\rho\rho'} \sum_{i=1}^{i=m} \left(\frac{\partial U}{\partial \omega_i} \right)^2$ pel $G_\Omega U \,.\, \nabla_\Omega U$.

L'espressione a 2° membro della (3), cioè il $\nabla_\Omega U \,.\, G_\Omega U$ coincide con ciò che si direbbe, col Beltrami, nei riguardi della forma quadratica $\sum_1^m \omega_i^2$, *parametro differenziale primo* (*puro*, come qui si preferisce dire, in accordo con la defin. al n. 2) e corrisponde alla *norma* (quadrato del *modulo* di $\nabla_\Omega U$ e $G_\Omega U$ nei riguardi della stessa forma): la indicheremo con $P_\Omega U$. Potremo allora, tenuto conto della (5) di (H di G, I) che vale, evidentemente, pure per la F(U), e della (2) precedente, scrivere la espressione di $L_\Omega F(U)$ nella forma

$$(4) \qquad L_\Omega F(U) = \frac{d^2 F(U)}{dU^2} P_\Omega U + \frac{dF}{dU} L_\Omega U :$$

nella quale riesce facile dare dell'espressione stessa un enunciato in linguaggio ordinario, e dedurne che, ove sia $\varphi(U)$ una funzione della U che soddisfa alla

$$(5) \qquad L_\Omega U - \varphi(U) P_\Omega U = 0 ,$$

una funzione *armonica* F(U) esisterà data dalla

$$(6) \qquad F(U) = C \int e^{-\int \frac{L_\Omega U}{P_\Omega U} dU} \cdot dU \qquad \text{(con C cost. arb.)} .$$

Così avviene, ad es., nel caso in cui sia U la pot. di esponente $\frac{1}{2}$ della

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} (\omega_i - a_i)^2 \qquad \text{(con le } a_i \text{ costanti)};$$

poichè, avendosi allora, al seguito di breve calcolo

$$L_\Omega U = \sum_1^m \left[\frac{1}{U} - \frac{(\omega_i - a_i)^2}{U^3} \right] = \frac{m-1}{U} \quad , \quad P_\Omega U = 1$$

si avrà $\varphi(U) = \frac{m-1}{U}$; e quindi

$$(8) \qquad \int \varphi(U)\, dU = (m-1) \int \frac{dU}{U} = (m-1) \log \alpha U ,$$

ove α è una cost. arb. Dalla (8) deducesi, per la (6)

$$F(U) = \int dU \, . \, e^{-(m-1)\log \alpha U} = \int dU (\alpha U)^{1-m} ;$$

e, conseguentemente, secondochè sia $m > 2$. o $m = 2$, sarà:

$$(9) \qquad F(U) = \frac{\alpha^{1-m}}{(2-m)\, U^{m-2}} \quad , \quad \text{o} \quad F(U) = \int \frac{dU}{\alpha U} = \frac{1}{\alpha} \log U \, ,$$

e si presenta così un risultato noto, ed in forma più completa dell'ordinaria (Cfr. Green, *Math. Papers*, pag. 187 e seg.; Beltrami. *Op. Mat.*, tomo II, pag. 103, in fine; Poincaré, *Acta Mathematica*, tomo 22, pag. 91, ecc., ecc.).

È istruttivo rilevare che alla 1ª delle (9). epperò quando $m > 2$, si è condotti dalla stessa (4) prendendo quale funzione U la (7). In fatti, in linea generale, supponendo che in (4) si abbia $F(U) = U^p$, si avrà

$$(10) \qquad L_\Omega U^p = p(p-1)\, U^{p-2} P_\Omega U + p U^{p-1} L_\Omega U \, ,$$

e per $p = \frac{r}{s}$

$$(10') \qquad L_\Omega \sqrt[s]{U^r} = \frac{r}{s} \left\{ \frac{r-s}{s} \sqrt[s]{U^{r-2s}}\, P_\Omega U + \sqrt[s]{U^{r-s}} \, . \, L_\Omega U \right\} .$$

d'onde, ove U sia la (7), trovandosi, dopo brevi calcoli, essere $P_\Omega U = 4U$, $L_\Omega U = 2m$, si ricaverà

$$(11) \qquad L_\Omega \sqrt[s]{U^r} = \frac{r}{s^2} \sqrt[s]{U^{r-s}} \, (4r - 4s + 2sm) \, .$$

Da questa segue, allora, che $\sqrt[s]{U^r}$ è una funzione armonica, nelle variabili $\omega_1 , \omega_2 , \ldots , \omega_m$, se r , s soddisfanno alla relazione

$$2r - 2s + sm = 0 \, ,$$

cioè se $\frac{r}{s} = \frac{2-m}{2}$. Escludendo dunque il caso di $m = 2$ che darebbe $r = 0$ [inammissibile data la questione che si tratta], si ritorna ad eccezione della cost. arb. α, alla 1ª delle (9).

2. Se la F sia una funzione $F(U_1 , U_2 , \ldots , U_p)$ di p altre funzioni $U_1 , U_2 , \ldots , U_p$, osservando che (come per le derivate ordinarie delle funzioni di funzioni così per le derivate estensive) si hanno le

$$(12) \qquad \nabla_\Omega F = \sum_1^p \frac{\partial F}{\partial U_i} \nabla_\Omega U_i \quad , \quad G_\Omega F = \sum_1^p \frac{\partial F}{\partial U_i} G_\Omega U_i \, ,$$

si avrà, dopo qualche trasformazione, la

$$L_\Omega F = (-1)^{\rho\rho'} \sum_1^p G_\Omega \frac{\partial F}{\partial U_i} \cdot \nabla_\Omega U_i + \sum_1^p \frac{\partial F}{\partial U_i} G_\Omega \nabla_\Omega U_i ;$$

d'onde, indicando generalmente con $P_\Omega(V, W)$ il prodotto

$$(13) \qquad \nabla_\Omega V \cdot G_\Omega W = \nabla_\Omega W \cdot G_\Omega V = (-1)^{\rho\rho'} G_\Omega V \cdot \nabla_\Omega W = (-1)^{\rho\rho'} G_\Omega W \cdot \nabla_\Omega V$$

che si dirà *parametro differenziale misto* delle funzioni V, W rispetto alle Ω, o rispetto alla $\sum_1^m \omega_i^2$, a fianco delle (12) e pel laplassiano di $F(U_1, U_2, \ldots, U_p)$, troviamo la seguente

$$(14) \qquad L_\Omega F = \sum_1^p P_\Omega\left(\frac{\partial F}{\partial U_i}, U_i\right) + \sum_1^p \frac{\partial F}{\partial U_i} L_\Omega U_i ;$$

il cui enunciato, in linguaggio ordinario, si presenta anche ovvio.

In particolare, se $F = U_1 U_2 \ldots U_p$, abbiamo, rispettivamente, per $\nabla_\Omega F$, $G_\Omega F$, $L_\Omega F$ le espressioni seguenti

$$(15) \qquad \begin{cases} \nabla_\Omega(U_1 U_2 \ldots U_p) = \sum_{i=1}^{i=p} U_1 \ldots \overline{U}_i \ldots U_p \nabla_\Omega U_i , \\ G_\Omega(U_1 U_2 \ldots U_p) = \sum_{i=1}^{i=p} U_1 \ldots \overline{U}_i \ldots U_p G_\Omega U_i \end{cases}$$

$$(16) \qquad L_\Omega U_1 U_2 \ldots U_p = \sum_{i=1}^{i=p} U_1 \ldots \overline{U}_i \ldots U_p L_\Omega U_i + 2 \sum_{i,k} U_1 \ldots \overline{U}_i \ldots \overline{U}_k \cdot U_p P_\Omega(U_i, U_k),$$

dove il tratto messo superiormente ad una funzione U rappresenta l'assenza di essa, nel prodotto del cui simbolismo fa parte, e dove i valori distinti di i, k si intendono presi da 1 a p.

Alle (16) può essere data la interessante forma seguente

$$(16') \qquad \frac{L_\Omega(U_1 U_2 \ldots U_p)}{U_1 U_2 \ldots U_p} = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{L_\Omega \overline{U}_i}{U_i} + 2 \sum_{i,k=1}^{i,k=p} \frac{P_\Omega(U_i, U_k)}{U_i U_k} .$$

3. Non è senza interesse, dal nostro punto di vista, offrire qui una qualche applicazione delle formole precedenti. Ad es., se nella (16) facciamo $U_1 = U_2 = \cdots = U_p = U$ ed osserviamo che allora il 1° $\sum$ della (16) si riduce alla somma di p volte il termine $U^{p-1} L_\Omega U$ e il 2° si riduce alla somma di $\frac{p(p-1)}{2}$ volte il termine $U^{p-2} P_\Omega(U,U)$, e che $P_\Omega(U,U) = P_\Omega U$, si trova per p intiero la (10). Se inoltre, nella stessa (16), si fa soltanto

$U_2 = U_3 = \cdots = U_p$, e poi (a titolo di comodità) nel risultato si cambia p in $p+1$, si ottiene (per p intiero) un'altra formola che è vera per p qualunque [come si deduce dalla (14) nella supposizione in cui sia $F = U_1 U_2^p$] e che porta ad una conclusione che sta a base della teoria delle *funzioni coniugate iperisferiche* quando per U_2 si scelga la $\left(\sum_1^m \omega_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$. In fatti, ove sia U_1 una funzione omogenea al grado τ nel senso euleriano, si avrà

$$P_\Omega(U_1, U_2^p) = p U_2^{p-1} \sum_1^m \frac{\omega_i}{U_2} \frac{\partial U_1}{\partial \omega_i} = p U_2^{p-2} . \tau U_1 ,$$

e l'equazione che esprime essere $U_1 U_2^p$ *armonica*, risulta perciò essere

$$U_1 L_\Omega U_2^p + 2p\tau U_1 U_2^{p-2} = 0 ;$$

ovvero, per la (10) applicata ad U_2^p, e per essere $L_\Omega U_2 = \frac{m-1}{U_2}$, $P_\Omega U_2 = 1$:

$$(m + p + 2\tau - 2) U_1 U_2^{p-2} = 0 .$$

Questa non può essere soddisfatta altrimenti che ponendo

$$m + p + 2\tau - 2 = 0 ,$$

da cui deducesi

$$p = 2 - m - 2\tau ;$$

ed esprime appunto il risultato secondo il quale, per ogni funzione omogenea U al grado τ che soddisfa alla equazione di Laplace in m variabili, esiste una sola potenza della radice quadrata r della somma dei quadrati di queste variabili che, moltiplicata per U, dia una funzione V pur essa soddisfacente all'equazione di Laplace, che tale potenza è la $(2 - m - 2\tau)^{ma}$, sicchè si ha

$$U = V r^{2-m-2\tau} ,$$

e che (come deducesi, a parte, ovviamente) la relazione fra U e V è reciproca.

Matematica. — *Proprietà del prodotto graduale.* Nota della prof. Virginia Vesin, presentata dal Corrispondente G. Peano.

Per moltiplicare due numeri con infinite cifre decimali, è necessario operare su numeri approssimati. Il metodo più semplice è quello del prodotto graduale, noto già ai tempi di Keplero, e che chiamasi anche prodotto ordinato, simmetrico, abbreviato. Preferisco il primo nome, perchè si parla del grado, e non dell'ordine di un polinomio; la moltiplicazione simmetrica si riferisce al procedimento, qui sotto indicato dalla proposizione 7, mentre il procedimento indicato al n. 6, non è simmetrico; il risultato, o prodotto, è lo stesso. Colla frase « moltiplicazione abbreviata » si può intendere più cose differenti; ed effettivamente s'intendono operazioni quasi identiche, ma non del tutto, a quella che qui esamino.

In questa Nota, premessa la definizione di prodotto graduale, ed alcune proprietà, che occorrono nel seguito, enuncio una regola per limitare la differenza fra prodotto ordinario e prodotto graduale; questa regola non la incontrai in alcuno dei numerosi libri relativi a questo soggetto, e non si trova nelle Note del prof. Peano, *Approssimazioni numeriche* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1917], che pure sono un'ampia raccolta di proposizioni e citazioni storiche relative a questo soggetto.

Qui adotto le notazioni di queste Note.

In quanto segue, ognuna delle lettere a, b indica una quantità numerica, o numero reale positivo, lo 0 incluso.

Ognuna delle lettere n, p, q indica un numero intero (positivo, o nullo, o negativo).

$\mathrm{V}a$ indica il valore intero di a.

X = dieci, è la base della numerazione.

1. $$\mathrm{V}_n a = \mathrm{X}^{-n}\,\mathrm{V}(\mathrm{X}^n a). \quad \text{Definizione.}$$

Questo $\mathrm{V}_n a$ si può leggere « il valore con n decimali di a ». Così: $\mathrm{V}_2 \pi = 3{\cdot}14$, $\mathrm{V}_0 \pi = 3$, $\mathrm{V}_{-1} \pi = 0$. Nel caso di n negativo, la corrispondenza fra il simbolo V_n e la sua lettura, è solo all'incirca. Ogni simbolo ha il valore dato dalla definizione, e non quello del linguaggio ordinario.

2. $$\mathrm{T}_n a = \mathrm{V}_n a - \mathrm{V}_{n-1} a. \quad \text{Def.}$$

$T_n a$ si può leggere « il termine di grado n di a ». Così: $T_2 \pi = 0{\cdot}04$, $T_0 \pi = 3$, $T_{-1} \pi = 0$. Si ha:

3. $a = \Sigma T_r a$, ove r assume i valori interi.

Esprime lo sviluppo di una quantità in frazione decimale.

4. $M_n a = a - V_n a$ Def.

$M_n a$ si può leggere « mantissa d'ordine n di a », ed è la quantità che bisogna aggiungere a $V_n a$ per avere a.

5. $a \times_n b = \Sigma T_r a \times T_s b$, ove r, s assumono i valori interi, tali che

$$r + s \leq n. \quad \text{Def.}$$

$a \times_n b$ si legge « il prodotto di grado n, di a per b »; ed è la somma dei prodotti dei termini di a per i termini di b, limitatamente ai prodotti il cui grado non supera n.

6. $a \times_n b = \Sigma T_r a \times V_{n-r} b$, ove r assume i valori interi.

Si ottiene dalla precedente facendo la somma rispetto ad s. Essa indica un modo di calcolare il prodotto graduale mediante prodotti parziali.

7. $a \times_n b = a \times_{n-1} b + \Sigma T_r a \times T_{n-r} b$, ove r assume i valori interi.

Questa permette di calcolare il prodotto, operando simmetricamente rispetto ai due fattori.

8. $a \times_n b = b \times_n a$.

Esprime la proprietà commutativa del prodotto graduale.

9. $a \times_n b = V_p a \times_n b + M_p a \times_n b$.

Esprime la proprietà distributiva del prodotto graduale rispetto alla somma, in un caso particolare. Non sussiste questa proprietà in generale.

10. $V_p a \times_{p+q} V_q b = V_p a \times V_q b$.

Il prodotto di grado $p + q$, di due quantità aventi rispettivamente solo p e q cifre decimali, come $V_p a$ e $V_q b$, vale il loro prodotto ordinario.

11. $M_p a \times_{p+q} M_q b = 0$.

Il prodotto di grado $p + q$ di due quantità, l'una minore di X^{-p}, e l'altra minore di X^{-q}, vale 0.

Le precedenti proposizioni da 6 ad 11 sono qui ricordate perchè servono per il teorema che segue.

12. $\Sigma \text{cifre } a = \Sigma X^r T_r a$, ove r assume i valori interi. Def.

Il nuovo simbolo Σ cifre a si può leggere « la somma delle cifre di a », e si esprime coi simboli precedenti, come è scritto. Quando a ha un numero finito di cifre non nulle, questa somma è finita; quando ne ha infinite, la somma è infinita; quando $a = 0$, la somma $= 0$.

13. $$a \times b - a \times_n b < (\Sigma \text{ cifre } a)\, X^{-n}.$$

Questa regola si applica se a ha un numero finito di cifre; si trova in Vieille (2ª ed. 1854), ed in altri autori. Una dimostrazione elementare si trova nel mio articolo: *Prodotti approssimati* (Periodico di Matematica, fascicolo V, 1917).

14. $$a \times b - a \times_{p+q} b < (\Sigma \text{ cifre } V_p a + \Sigma \text{ cifre } V_q b + 1)\, X^{-p-q}.$$

Questa è la proposizione che volevo stabilire. La sua dimostrazione consta dei passi seguenti:

(1) $$\begin{aligned} a \times b &= (V_p a + M_p a) \times b = V_p a \times b + M_p a \times b \\ &= V_p a \times b + M_p a \times (V_q b + M_q b) \\ &= V_p a \times b + M_p a \times V_q b + M_p a \times M_q b \end{aligned}$$

e ciò in virtù della prop. 4.

(2) $$a \times_{p+q} b = V_p a \times_{p+q} b + M_p a \times_{p+q} V_q b$$

in virtù delle proposizioni 8, 9, 11.

(3) $$V_p a \times b - V_p a \times_{p+q} b < (\Sigma \text{ cifre } V_p a)\, X^{-p-q}$$

(4) $$M_p a \times V_q b - M_p a \times_{p+q} V_q b < (\Sigma \text{ cifre } V_q b)\, X^{-p-q}.$$

Le (3) e (4) derivano dalla prop. 13.

(5) $$M_p a \times M_q b < X^{-p-q}$$

perchè $M_p a < X^{-p}$, e $M_q b < X^{-q}$. Dalle (1), (2), (3), (4), (5) segue il teorema.

Per illustrare la regola precedente mediante un esempio con poche cifre, prendo il classico problema del calcolo di $\pi \times \sqrt{2}$.

Si ha $\pi = 3{\cdot}1415\ldots$, $\sqrt{2} = 1{\cdot}4142\ldots$ Calcolo:

Prodotto di grado $0 = T_0\pi \times T_0\sqrt{2}$ $= 3$

Somma dei prodotti di grado $1 = T_0\pi \times T_1\sqrt{2} + T_1\pi \times T_0\sqrt{2}$ $= 1{\cdot}3$

» » » » $2 = T_0\pi \times T_2\sqrt{2} + T_1\pi \times T_1\sqrt{2} + T_2\pi \times T_0\sqrt{2} =$ $\cdot 11$

» » » » 3 $=$ $\cdot 030$

$\pi \times_3 \sqrt{2}$ $= 4{\cdot}440$

onde $\pi \times \sqrt{2} > 4{\cdot}440$, e $<$ dello stesso numero aumentato di:

Σ cifre $V_4\ \pi + \Sigma$ cifre $V_{-1}\sqrt{2} + 1 = 15$,

o Σ cifre $V_3\ \pi + \Sigma$ cifre $V_0\sqrt{2} + 1 = 11$,

o Σ cifre $V_2\ \pi + \Sigma$ cifre $V_1\ \sqrt{2} + 1 = 14$,

o Σ cifre $V_1\ \pi + \Sigma$ cifre $V_2\ \sqrt{2} + 1 = 11$,

o Σ cifre $V_0\ \pi + \Sigma$ cifre $V_3\ \sqrt{2} + 1 = 14$,

o Σ cifre $V_{-1}\pi + \Sigma$ cifre $V_4\ \sqrt{2} + 1 = 13$ unità dell'ordine decimale 3.

Segue: $\pi \times \sqrt{2} < 4{\cdot}451$.

La prima e la seconda espressione del resto nel prodotto graduale sono note; ed è appunto, cercando di concordare le due espressioni che ho trovato la legge generale.

Il prodotto graduale serve pure a calcolare per approssimazione il prodotto di due numeri con un numero finito di cifre decimali. Si ha in questo caso una regola simile alla 14.

15. Se u, v sono interi positivi, lo zero compreso, e se a e b sono quantità numeriche con un numero finito $p+r$ e $q+s$ di cifre decimali, cioè se a è della forma (intero $\times X^{-p-r}$) e b è della forma (intero $\times X^{-q-s}$), allora:

$$a \times b - a \times_{p+q} b < (\Sigma \text{ cifre } M_p a + \Sigma \text{ cifre } M_q b)\, X^{-p-q}.$$

Infatti:

(1) $$\begin{aligned} a \times b &= a \times (V_q b + M_q b) = a \times V_q b + a \times M_q b \\ &= (V_p a + M_p a) \times V_q b + a \times M_q b \\ &= V_p a \times V_q b + M_p a \times V_q b + a \times M_q b \end{aligned}$$

ed

(2) $$a \times_{p+q} b = V_p a \times_{p+q} V_q b + M_p a \times_{p+q} V_q b + a \times_{p+q} M_q b.$$

Ma

(3) $$V_p a \times V_q b = V_p a \times_{p+q} V_q b$$

per la prop. 10; e dalla 13, si ha:

(4) $$M_p a \times V_q b < M_p a \times_{p+q} V_q b + (\Sigma \text{ cifre } M_p a)\, X^{-p-q}$$

(5) $$a \times M_q b < a \times_{p+q} M_q b + (\Sigma \text{ cifre } M_q b)\, X^{-p-q}.$$

Dalle (1)...(5) il teorema.

Esempio. — Vuolsi calcolare per approssimazione il prodotto dei numeri finiti: $x = 3{\cdot}1415$; $y = 1{\cdot}4142$.

Si è visto che:

$$x \times_3 y = 4{\cdot}440$$
$$\text{Somma dei prodotti di grado 4} \quad 23$$
$$\text{» » » » 5} \quad 39$$
$$x \times_5 y = 4{\cdot}44269$$

Il prodotto esatto ha otto cifre decimali; $x \times_5 y$ ne ha cinque. Perciò sarà $x \times y > 4{\cdot}44269$, e minore di questa quantità aumentata:

somma delle 3 ultime cifre di x, $= 10$
o » » 2 ultime cifre di x, e l'ultima di y $= 8$,
o » » ultima di x e le 2 ultime di y $= 11$,
o » » 3 ultime di y $= 7$ unità

dell'ultimo ordine decimale.

Segue: $x \times y < 4{\cdot}44276$.

Aeronautica. — *Sulla misura barometrica delle altezze a scopo aeronautico.* Nota II di Mario Tenani, presentata dal Socio E. Millosevich.

L'applicazione della formula altimetrica al calcolo delle altezze, ove, come è necessario per ridurre l'errore inferiore a 1 m. su 100, si voglia tener conto della temperatura attuale, richiede mezzi speciali che ora descriveremo: accenneremo pertanto alla speciale disposizione da darsi al termometro a bordo e a una nuova forma di altimetro che permette l'immediata applicazione della formula altimetrica senza calcoli o tabelle di incomodo uso.

Misura della temperatura. — Come abbiamo veduto, per una misura dell'altezza con l'approssimazione di circa l'uno per 100, occorre e basta conoscere la media delle temperature osservate al suolo e all'altezza che si vuol determinare.

Mentre la temperatura al suolo è nota con sufficiente attendibilità, perchè misurata all'ombra e in località generalmente adatta e con ventilazione, la misura della temperatura in alto richiede speciale attenzione. A bordo il termometro oltre ad essere posto in località ventilata dovrebbe anche essere protetto di giorno dalla forte influenza della radiazione. Negli aeromobili la ventilazione è sempre sufficiente, data la velocità propria sempre notevole di tali apparecchi; ma la difesa dalla radiazione solare è difficile, a meno che non si ricorra a dispositivi speciali. Uno potrebbe essere il

seguente: introdurre il termometro in un tubo apposito di sottile lastra di pacfong *A*, munito di una finestra *F* per la lettura, e di appositi supporti interni per permettere di disporre il termometro *T* secondo l'asse del tubo. La parte del tubo che circonda il bulbo potrà tenersi facilmente pulita fino ad essere speculare internamente ed esternamente; ed il termometro col tubo dovrà collocarsi in posizione tale da ricevere il vento relativo all'aeromobile sull'apertura *B* del tubo che circonda il bulbo. Con tale dispositivo si sarà procurata una sufficiente difesa dalla radiazione solare, provvedendo nello stesso tempo a una ventilazione del termometro, analogamente a quanto avviene, per gli sferici (per cui il vento relativo è nullo), col termometro ad aspirazione Assmann. Siccome a chi naviga importa conoscere, oltre che la temperatura, anche la temperatura media, per non avere ad ogni momento

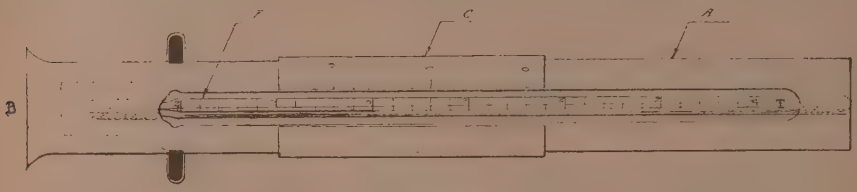


Fig. 1.

la noia di calcolarla si potrà leggerla direttamente adattando attorno al tubo anzidetto un secondo tubo *C* mobile ad attrito sul primo tubo e munito di una finestra, per vedere il termometro, analoga a quella del primo tubo. Sull'orlo di tale finestra sia incisa una graduazione di una diecina di tratti i cui intervalli siano ciascuno lungo il doppio di quelli che rappresentano i gradi del termometro. Si porti al momento di partire lo zero di tale graduazione in corrispondenza dell'indice di mercurio. Se dopo esserci sollevati vedremo l'indice di mercurio in corrispondenza del tratto 8, vorrà dire che la temperatura media è quella di partenza meno 8°, operazione che si fa agevolmente a memoria, senza sforzo superiore a quello della semplice lettura del termometro: resta anche permanentemente segnata la temperatura di partenza e nulla impedisce di leggere la temperatura attuale.

Misura della altezza. — La pressione indicata dal barometro fornisce, insieme con la temperatura media ora ottenuta, quanto basta per misurare l'altezza. Anche coi mezzi attuali si può procedere alla determinazione di questa: basterà, infatti, ricorrere a tabelle già calcolate e leggere l'altezza corrispondente alla pressione e alla temperatura indicata: e sottrarre poi l'altezza, corrispondente in dette tabelle alla pressione di partenza e alla stessa temperatura; ciò, però, può essere per certi motivi lungo ed incomodo; oppure, ciò che è equivalente, ricorrere a una rappresentazione grafica della formula stessa per dedurne l'altezza.

Già in altra occasione indicai un grafico utile per tale procedimento, ma voglio qui indicare una nuova forma da darsi all'altimetro per non dovere ricorrere a tabelle o a grafici. Come subito si comprende, la rappresentazione grafica più utile e di uso immediato della formula è quella in coordinate polari: l'indice dell'altimetro si muove dipendentemente dalle variazioni di pressione; se dunque sul quadrante dell'altimetro vi sarà una

Fig. 2. — In questa figura (scala $^1/_2$) sono contrassegnate solo le curve di altezza 0.5, 1, 1.5, 2 Km. e non si possono distinguere chiaramente le indicazioni —10°, —5°, 0°, 5°, 10°, 15°, 20° che contradistinguono i cerchi concentrici di raggio via via più grande, di cui si parlà nel testo.

rappresentazione grafica della formula in coordinate polari ove si prenda per argomento la pressione, e per raggio vettore la temperatura media, l'indice segnerà di per sè stesso la direzione del raggio vettore e una apposita graduazione in gradi, segnata sulla mostra stessa, permetterà di rintracciare sul quadrante l'altezza cercata. La figura seguente mostra appunto una tale rappresentazione grafica, e cioè la mostra di un altimetro, per altezze fino a 2 km., che offre, senz'alcun calcolo o alcuna consultazione di tabelle, l'altezza cercata. L'uso ne è semplicissimo: *A* è un indice che si porta al momento di partire sotto l'indice dell'altimetro e che, restando fermo, serve a rammentare la pressione di partenza (nella figura 759 mm.): *I* è l'indice dell'al-

timetro che durante il volo ha assunto, ad esempio, la posizione della figura (630 mm.) (1). Le curve segnate sulla mostra portano scritta un'altezza, e sono linee di uguale altezza della rappresentazione grafica sopra accennata. I cerchi concentrici, segnati sulla mostra, portano l'indicazione della temperatura corrispondente al loro raggio. Supponiamo pertanto che la temperatura media letta sul termometro sia —5°: l'altezza corrispondente alla pressione di partenza si trova sull'indice fisso *A* in corrispondenza del cerchio segnato col numero —5°, ed è 11 m. L'altezza nel momento attuale è quella che contrassegna la curva di altezza che incrocia l'indice in corrispondenza del cerchio segnato —5° ed è 1480 m. L'innalzamento effettuato è quindi 1469 m., differenza dei due numeri letti. L'innalzamento vero era di 1463 m. (vedi luogo citato).

Con un altimetro comune (ad es. un altimetro Richard, scala del colonnello Goulier) nel modo famigliare ai navigatori, sebbene errato, che consiste nel portare lo zero della graduazione altimetrica sotto l'indice al momento di partire, si sarebbe letto un innalzamento di 1573 m. con un errore di +110 m., errore che non è affatto trascurabile (7 % dell'altezza). Si comprende come fra una curva e l'altra della mostra sia necessaria una interpolazione ad occhio, sempre facile nei limiti di precisione imposti dall'apparecchio. S'intende pure come tale altimetro è solo uno che abbia tali proprietà. s'impone quando l'altezza debba essere conosciuta con precisione, come pel tiro o per calcoli di rotta; per l'operazione di atterraggio esso può servire egualmente bene dell'altimetro comune.

La tabella seguente contiene alcuni confronti che convinceranno maggiormente di tutto ciò che si è detto.

Data	Altezza di partenza	Pressione in basso	Pressione in alto	Altezza vera s. l. d. m.	Altezza dedotta dall'altimetro descritto	Altimetro Richard	Altimetro Agolini	Altimetro De Giglio	Temperatura media
15 luglio . . 1915	260	736.9	579.5	2303	2320	2260	2190	2255	+ 16.5
24 gennaio . 1916	260	749.1	548.0	2810	2813	2864	2766	2857	+ 4.4
29 » . 1916	260	744.4	517.3	3180	3200	3280	3281	3290	— 0.6
20 aprile . . 1917	260	738.8	591.2	2040	2070	2140	2048	2135	— 1.0
3 giugno. . 1909	77	754	431	4710	4707	4639	4554	4734	+ 8.8
9 dicembre 1909	77	754	418	4635	4642	4859	4733	4984	— 9.4
7 luglio . . 1910	77	746	418	4725	4730	4767	4692	4902	+ 0.3
13 agosto. . 1910	77	760	425	4820	4812	4799	4712	4918	+ 4.2
4 gennaio . 1908	77	759	630	1540	1546	1647	1627	1647	— 5.0
11 » . 1909	77	758	595	1985	1990	2097	2007	2097	— 4.9
7 marzo . . 1912	77	750	592	1980	1977	2087	1980	2087	— 0.7

(1) I dati di questo esempio sono tolti dal lancio di pallone sonda del 4 gennaio 1908 a Pavia. Vedi Ann. dell'Uff. Centr. di Meteor., vol. 32, parte I Gli altri esempi sono tolti dai lanci pubblicati nei medesimi annali.

Sono esempi tolti dai lanci di Vigna di Valle (260 m. sul livello del mare) e di Pavia (77 m. s. l. d. m.); le colonne 3ª e 4ª contengono le pressioni osservate al suolo e all'altezza indicata nella colonna 5ª, che pel modo come è stata calcolata, si può ritenere esatta. Nelle colonne 6ª, 7ª, 8ª e 9ª sono contenute le altezze sul livello del mare che avrebbero fornito in quelle circostanze rispettivamente: l'altimetro sopra descritto in questa Nota (1); un altimetro Richard, scala del col. Goulier; un altimetro della fabbrica Agolini di Parma (ipotesi di temperatura media uguale a zero gradi a tutte le altezze); un altimetro della fabbrica De Giglio di Torino (ipotesi identica a quella Goulier fino a 3000 m.; non è facile indovinare l'ipotesi sulla temperatura ammessa per le altezze superiori). Nell'ultima colonna è contenuta la media delle temperature osservate al suolo e all'altezza indicata, nei singoli casi.

Le considerazioni e gli esempi esposti nella Nota I e nella presente, mostrano:

1°) quale attendibilità possiamo ragionevolmente affidare ai dati di altezza forniti dai comuni altimetri;

2°) quale importanza abbia il tener conto della temperatura media attuale e quale errore induca una errata ipotesi sulla temperatura stessa;

3°) come per la pratica della navigazione aerea possa essere sufficiente prendere per temperatura media la media delle temperature agli estremi dell'altezza da misurare;

4°) come, tenendo conto di tale temperatura, si possa immediatamente avere, con l'uso del nuovo altimetro sopra descritto, il valore dell'altezza in metri con approssimazione di circa un metro per cento.

Botanica. — *Primi risultati della seminagione del Caprifico* (2). Nota di B. Longo, presentata dal Socio R. Pirotta.

Com'è stato dimostrato dalle ricerche fatte in Italia dal Cavolini, dal Gasparrini e da me, non che da quelle fatte in Francia dal Leclerc du Sablon, il *Ficus Carica* L. si presenta — tanto allo stato spontaneo che coltivato — sotto due forme: Fico e Caprifico.

È stato anche dimostrato sperimentalmente — prima dal Gasparrini e poi dal Trabut — che seminando il Fico (cioè i frutticini dei *forniti*) si ottengono sia piante di Fico che piante di Caprifico.

(1) Per le altezze superiori a 2 km. costruii un altro altimetro della forma indicata per altezze fino a 5 km.

(2) Lavoro eseguito nel R. Orto Botanico di Pisa.

Ma che cosa si ottiene seminando il Caprifico (cioè quei rari frutticini che si trovano tra le galle dei suoi *forniti*)?

Io ponevo il problema nel 1911 quando al Congresso di Roma dicevo: « ... Quando noi troviamo allo stato selvatico delle piante di Fichi e di Caprifichi non possiamo dire con sicurezza che esse abbiano origine tutte da semi di Fichi (selvatici o coltivati, caprificati naturalmente o artificialmente); potrebbe anche darsi che qualcuna provenisse anche da semi di Caprifichi, e sarebbe interessante sperimentare ciò, vale a dire fare delle seminagioni di Caprifico per vedere se vengono fuori, ed in quali proporzioni, le due forme — Caprifico e Fico » (1).

E, allo scopo di rispondere al quesito, mi proposi di seminare semi (2) di Caprifico, sia d'individui spontanei che d'individui coltivati.

Infatti il 7 marzo 1912 seminai, in altrettanti vasetti, 16 semi di Caprifico selvatico, trovati nei *forniti* raccolti il 25 settembre 1911 sulle vecchie mura di Monteriggioni nel Senese. Ne germinarono 12, ma le piantine si mostrarono assai delicate durante il primo periodo del loro accrescimento, tanto che ne sopravvissero soltanto sei. Le sei piantine superstiti, che, passato il primo periodo, crebbero poi rigogliose, furono nell'anno successivo messe in terra presso un muro, nella parte più riparata e calda dell'Orto Botanico di Siena, di cui ero allora Direttore.

Inoltre, nelle vacanze estive del 1912, scrissi al prof. Enrico Carano pregandolo d'inviarmi, a suo tempo, da Gioia del Colle (Puglie), ove si pratica la caprificazione, dei *forniti* maturi di Caprifico coltivato. Il 20 settembre egli m'inviava gentilmente diversi *forniti*, tra le cui galle potei rintracciare 53 semi, che furono anch'essi seminati in altrettanti vasetti. Ne germinarono parecchi, ma, delle piantine ottenute, non ne sopravvissero che 15, che poi, dopo un anno, furono alla loro volta poste in terra nell'Orto Botanico di Siena.

Tutte le piante continuarono a crescere bene, sotto forma arbustiva e con foglie chi più chi meno divise.

Passato nel 1915 alla direzione dell'Orto Botanico di Pisa, allo scopo di continuare le osservazioni, provvidi a trasportare a Pisa le 21 piante, che feci trapiantare all'estremità dell'Orto, lungo il muro di cinta, all'angolo tra la via Solferino e la via Galli Tassi, disponendone 3 lungo il muro di via Solferino e le rimanenti lungo il muro di via Galli Tassi.

Le piante hanno mostrato, nel clima di Pisa, un accrescimento più vigoroso. Gl'individui più sviluppati, già fin dal 1916, avevano presentato l'abbozzo di qualche ricettacolo, che però abortì ben presto senza continuare a svilupparsi. Nel 1917 poi, alcune delle piante hanno portato i

(1) B. Longo, *Sul Ficus Carica*, Ann. di Bot., vol. IX, fasc. 4°, 1911, pag. 426.

(2) Uso la parola semi per semplicità, ma s'intende sempre frutticini.

ricettacoli, e precisamente cinque delle sei provenienti dai semi di Monteriggioni e due delle quindici provenienti dai semi di Gioia del Colle. L'esame dei ricettacoli ha rivelato come Fichi rispettivamente un esemplare del primo gruppo e uno del secondo gruppo, e come Caprifichi tutti gli altri (1). Concludendo hanno dato piante di Fico e di Caprifico tanto i semi provenienti da Caprifico selvatico che quelli provenienti da Caprifico coltivato.

Manca ancora la fioritura delle altre 14 piante, cioè dei due terzi delle piante sottoposte ad esperimento e di esse riferirò non appena avranno fiorito, potendosi allora trarre qualche conclusione anche al riguardo della percentuale di piante di Fico e di Caprifico ottenute dalla seminagione.

Resta in ogni modo fin da ora acquisito, in base ai risultati già ottenuti, che la seminagione del Caprifico dà lo stesso risultato di quella del Fico: vale a dire che *da semi di Caprifico — analogamente come da semi di Fico — si ottengono tanto piante di Fico che di Caprifico* (2).

Fisiologia vegetale. — *Sulla influenza diretta della linfa elaborata dal selvatico sul domestico, e sulla azione che soluzioni acide, direttamente assorbite, esercitano sulla pianta.* Nota di C. Campbell, presentata dal Socio R. Pirotta.

Dall'osservazione della maggiore resistenza normalmente dimostrata dalle piante selvatiche od inselvatichite verso gli ordinarî od eventuali parassiti, in paragone alle coltivate, sorse l'ipotesi del prof. Comes che alla maggiore acidità dei succhi fosse dovuto tale diverso comportarsi delle piante selvatiche, in confronto alle coltivate della stessa specie.

Enunciata l'ipotesi, lavori sperimentali di indagine analitica, e quindi diretta, furono condotti per controllarne il valore. Se nonchè non mancarono spesso delle critiche in proposito; l'argomento adunque è ancora controverso; ma sussistendo la base dell'ipotesi, mi convinsi della utilità di studiare sperimentalmente la questione, sostituendo alla pura ricerca analitica, spesso malsicura, quella biologica.

Dato il diverso chimismo dei succhi dei selvatici paragonati coi domestici della varietà o specie, e l'influenza che un diverso porta-innesto eser-

(1) Incidentalmente fo rilevare che si sono rivelate Fico o Caprifico, sia piante a foglie molto divise, che piante a foglie poco divise; quindi la minore o maggiore profondità dei lobi fogliari non ha valore sistematico — per poter, cioè, diagnosticare se si ha a che fare con piante di Fico o di Caprifico.

(2) Così che quando troviamo delle piante di *Ficus Carica* L. selvatiche (siano esse Fichi o Caprifichi) non possiamo dire se esse provengano da semi di Fico o di Caprifico. Certamente le probabilità maggiori sono per i semi di Fico, pel fatto che i semi nei *forniti* del Fico sono molto numerosi, mentre sono assai pochi quelli che si rinvengono nei *forniti* del Caprifico.

cita sul nesto, nella composizione chimica dei suoi succhi, pensai di compiere l'operazione inversa, a quella normalmente praticata in albericoltura, innestando nella parte superiore di un domestico, un selvatico del genere o della specie, in maniera da esercitare nella pianta sottostante — domestica — l'influenza della linfa elaborata dal nesto soprastante — selvatico.

E stavo studiando in questi termini la questione, quando il prof. Acqua illustrò il suo geniale metodo sperimentale (1), sull'assorbimento artificiale dei liquidi nelle piante, da farmene considerare tutta l'importanza nella questione, tentando l'assorbimento da parte della pianta di soluzioni pure di acidi organici diversi.

Venni così ad avere due specie di prove; quella della influenza del diverso chimismo del selvatico sul domestico, a prescindere dalla sua eventuale composizione da studiarsi separatamente, e quella della diretta influenza di soluzioni acide assorbite dalla pianta, e quindi dalla importanza reale o meno della acidità in generale, e particolarmente di uno od altro acido nei riguardi della ipotesi enunciata, ed in via più lata sulla azione biologica nell'organismo vegetale.

***

Azione esercitata dalla linfa elaborata da nesto selvatico sopra soggetto domestico. — È questo il punto di partenza delle mie esperienze, che, contrariamente alla mia volontà, non ho potuto estendere come avrei voluto. Dette esperienze possono portare argomenti di un certo valore, intorno alla ipotesi del prof. Comes, essendo nota l'influenza che sulla composizione chimica dei succhi vegetali può essere reciprocamente esercitata dal nesto e dal soggetto.

Non è stata data spesso nel passato la dovuta importanza all'influenza che poteva essere esercitata sul soggetto — specie se non ridotto al semplice sistema radicale — dalla linfa elaborata da un nesto con succhi a diversa composizione chimica; poichè la sola preoccupazione, è stata il più delle volte quella del prodotto che da un nesto poteva ottenersi con uno od altro porta-innesto, e quindi è stata principalmente considerata l'influenza chimica, morfologica e biologica, che il diverso porta-innesto può indurre nel nesto.

Apparsa l'ipotesi dei succhi acidi del prof. Comes, a me sorse subito l'idea di provarla sperimentalmente, innestando sulla parte superiore o laterale di una pianta fruttifera di varietà gentile, un nesto tolto da pianta selvatica della specie o affine, che col gentile, funzionante da soggetto, avesse affinità. Supposi in tal caso che la linfa elaborata da tale nesto non poteva non esercitare la sua influenza sul domestico sottostante o laterale, e che

(1) C. Acqua, *Sull'assorbimento artificiale di liquidi nelle piante per mezzo delle parti aeree*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Roma 1914.

quindi la sua maggiore eventuale acidità, avrebbe potuto aumentare la resistenza del soggetto verso i parassiti, sempre ammettendo giuste le idee del prof. Comes.

E la mia supposizione ha avuta sperimentalmente conferma, in quanto che, nel secondo o terzo anno dall'innesto, si rende palese l'influenza del nesto sul soggetto, col diverso colorito delle foglie del domestico, e con la maggiore resistenza sia verso la siccità sia verso alcuni parassiti.

Eseguii esperienze varie, innestando in due casi sul pesco un pruno, probabilmente il marittimo, e in tre casi sul melo franco il selvatico. In tutti i casi si ebbe in paragone dei controlli: un più intenso colorito del fogliame (più spiccato nel pesco) sul soggetto, una evidente maggiore resistenza alla siccità ed anche a taluni parassiti (nel pesco all'Esvasco e nel melo all'Oidio).

Esperienze di diretto assorbimento per mezzo delle parti aeree di soluzioni acide. — Ho sino ad ora studiata l'azione di soluzioni al 0,5 ‰, 1 ‰ e 2 ‰ di acido tartarico, citrico e malico; recenti esperienze (1917) con acido ossalico e tannico, mi sono state distrutte, prima che potessi raccogliere qualche utile indicazione.

Volli ancora tentare (1917) soluzioni acide in soluzioni di saccarosio, per variare il potere osmotico delle soluzioni stesse, sia nei riguardi in parola, sia sotto altri aspetti che vado studiando.

Esperienze del 1915. — A piante di pesco innestate sul franco, feci assorbire direttamente da un ramo laterale reciso, soluzioni al 0,5 ‰ e 1 ‰ di acido tartarico e citrico. Il ramo reciso con rasoio sotto acqua, venne posto immediatamente nella soluzione acida. Ogni varietà di pesco in doppio esemplare. — Carmau — Fitzgerald — « (colpito in modo eccezionale dall'*Anuraphis persicae* Bog.) » M°. Girerd — Grwford late —, ha avuto il suo controllo.

Si è verificato subito un forte assorbimento di liquido, che nelle prime 24 ore è arrivato a 200 cent. cubici. La soluzione venne rinnovata. L'assorbimento cessò però nel secondo giorno d'esperimento; le foglie da un bel verde diventarono giallastre nel ramo reciso, e un poco meno in qualche laterale. Nel ramo direttamente assorbente, dopo qualche giorno si ebbe la prova della morte, col disseccamento delle foglie e del ramo stesso; sparì invece l'ingiallimento delle foglie nei rami laterali.

Meno tali fenomeni, nessuna azione palese nella pianta in paragone al controllo, sino al cadere delle foglie nell'autunno.

Esperienze del 1916. — Oltre al ripetere le esperienze del 1915, con soluzioni di acido tartarico e citrico, feci nuove esperienze sui peschi, con soluzioni di acido malico al 0,5 ‰ e 1 ‰, estendendole ad una piantina di melo franco di piede, in confronto con piantine selvatiche, raccolte in boschi naturali; le prime fortemente colpite da *Mizoxilus laniger* Haus.

Sulla pianta di pesco Fitzgerald fortemente colpita da *Anuraphis persicae* ho ripetuto il trattamento, sostituendo l'acido malico all'acido citrico.

Come nel 1915, si è verificato subito un forte assorbimento del liquido, molto più sollecito nella pianta di melo, l'ingiallimento delle foglie, a cui è seguito il disseccamento delle stesse sul ramo assorbente, e la morte dello stesso.

Nessuna sensibile e sicura differenza nelle piante trattate di fronte ai controlli, sino al cadere delle foglie nel tardo autunno.

Esperienze del 1917. — Continuazione delle precedenti, in più con acido malico al 2 ‰ e di acido tartarico e citrico al 5 ‰ in soluzione di saccarosio al 5 %.

In queste esperienze per semplicità non fu sperimentata la soluzione semplice di saccarosio.

Notati gli stessi fenomeni precedenti nelle soluzioni acide semplici. Un più esteso ingiallimento delle foglie nei rametti laterali; con la soluzione acida in soluzione di saccarosio, assorbimento più lento e più diffuso della soluzione, manifestata dal più esteso ingiallimento delle foglie nei rami laterali, dovuto indubbiamente al diverso valore osmotico della soluzione stessa.

Nella primavera 1917, si sono però resi palesi diversi fatti, che ulteriormente confermati, renderebbero palese l'importanza di tali ricerche e l'utilità di estenderle. Nella piantina di melo ed in quella di pesco Fitzgerald, che nel 1916 avevano assorbita la soluzione di acido malico all'1 ‰, si sono notate delle differenze, di fronte alle piante controllo, da non potere sfuggire, e cioè nella pianta di melo quasi totalmente scomparsa l'infezione di *Mizoxilus laniger*, un maggiore sviluppo delle foglie apicali e di un verde più intenso. L'infezione di *Podosphaera leucotrica* Ell. Ev. nella sua forma conidica di *Oidium farinosum* Cootre da cui furono colpite tutte le altre piante franche, ha lasciata immune la pianta in parola, e quelle selvatiche. Però il bel verde delle foglie apicali è andato sparendo nell'estate, con il riapparire della infezione di *Mizoxilus laniger*. Come nelle altre piante franche senza alcun trattamento, nell'estate si verificarono altre infezioni di insetti, da cui sono rimaste immuni le sole piante selvatiche.

Delle due piante di pesco della varietà « Fitzgerald » colpite in modo notevole dagli afidi, e per tale causa molto deperite e con numerosi rametti secchi, la pianta prima in migliori condizioni, senza alcun trattamento, tenuta come controllo, nella estate è morta, mentre quella peggiore più colpita da afidi, trattata nel 1915 con acido citrico, e acido malico, nel 1966, è vissuta, non solo, ma con un colorito verde delle foglie, più intenso della pianta controllo, prima della morte, e delle piante vicine di altre varietà, pur permanendo l'infezione di afidi

***

Non è lecito da un primo contributo, trarre delle conclusioni, che nuove e più estese ricerche, se forse non potranno distruggere, potranno modificare; ma è giusto e utile affermare l'importanza di estenderle sulla via tracciata, per la risoluzione dei problemi enunciati.

I due metodi sperimentali, se hanno comune lo scopo, hanno però diversa importanza, e diversa difficoltà offrono in pratica, in quanto mentre l'innesto, potrà trovare anche un'utile applicazione pratica, ed essere senza difficoltà adottata dal coltivatore, il diretto assorbimento resta un metodo sperimentale rigoroso e importantissimo di indagine che spetta prevalentemente a ricerche di laboratorio.

Innestando la parte superiore di un soggetto gentile, con nesto selvatico a diverso chimismo (più acido), non sarà difficile dopo uno o due anni, determinare le modificazioni indotte dal nesto, confrontando le reazioni chimiche o microchimiche del selvatico, del domestico non innestato, e di quello innestato, che abbia subìto l'influenza del selvatico, e paragonando la diversa resistenza ai parassiti, anche a mezzo di infezioni artificiali.

Sarà utile risperimentare l'influenza di un nesto di vite americana sopra soggetto europeo, sui riguardi della resistenza fillosserica, e stabilire nella stessa il valore del mutato chimismo, ed estendere le esperienze sul diretto assorbimento di liquidi. Il non trovarmi in regione fillosserata, ha resa impossibile una tale esperienza, che ritengo riuscirebbe quanto mai istruttiva.

Col metodo del diretto assorbimento di soluzioni acide, che si presta a rigorose e più complesse ricerche, è di necessità più delicato il lavoro di ricerca per seguire l'acido nel suo passaggio nei tessuti vegetali, e determinare le modificazioni chimiche e morfologiche che esso può indurvi in generale; e più specialmente nei riguardi della resistenza a dati parassiti.

È notevole l'azione negativa del primo momento, in cui si manifesta l'azione tossica dell'acido, ed a cui sembra seguire nel successivo anno una azione benefica e palese. Ma più estese esperienze dovranno meglio illuminarci in proposito.

I risultati fin qui ottenuti sono però più che incoraggianti a proseguire nelle ricerche, con acidi diversi, a varie concentrazioni, e in periodi diversi della vegetazione, il che appunto io mi propongo di fare nelle nuove ricerche che saranno quanto prima intraprese.

Patologia. — *Sul possibile passaggio dei tripanosomi nel latte* (1). Nota del prof. dott. Alessandro Lanfranchi, presentata dal Socio B. Grassi.

In una precedente Nota (2), su questo argomento, avvertivo che mi limitavo a riferire i risultati ottenuti esperimentando sui cani, e, in base ai risultati ottenuti, concludevo:

a) come sia possibile il passaggio nel latte, dei tripanosomi *Brucey, rodesiense, gambiense;*

b) come sia possibile, per i *virus Brucey* e *gambiense*, trasmettere l'infezione ai neonati, mediante l'allattamento.

Dopo tale pubblicazione, una sola osservazione in merito — che sia a mia conoscenza — è stata resa nota, per opera di H. Velu e R. Eyraud (3), i quali riportano, come una cagna infetta col *virus* dei cavalli del Marocco, ha trasmessa la malattia ad uno dei suoi piccoli.

Nella presente Nota, riporto i risultati ottenuti, con le ricerche eseguite su altre specie animali, con l'impiego dei *virus Brucey*, *rodesiense*, *Evansi*, *gambiense*, *Lanfranchii*: *virus* tutti favoritimi dal prof. Mesnil dell'Istituto Pasteur di Parigi, che ancora una volta ringrazio, dei quali ho fatto cenno in precedenti lavori.

***

Le ricerche ebbero il triplice scopo:

a) di rilevare se i piccoli, lasciati alla mammella, si infettavano;

b) se era possibile la dimostrazione dei tripanosomi con l'esame diretto del latte;

c) se il latte era infettante, mediante l'inoculazione di esso, nel peritoneo dei ratti o dei topolini.

Ricerche col *virus nagana*.

Ratto 1. — Ad una femmina, che ha partorito cinque piccoli, il 24 aprile 1914, si inocula il giorno stesso, nel peritoneo 1 cm³. di soluzione tipo, secondo Laveran e Mesnil.

(1) La oro eseguito nell'Istituto di Patologia e Clinica medica veterinaria nella Regia Università di Bologna. Le ricerche eseguite nel 1917 furono compiute con mezzi concessi all'Istituto dalla Direzione di Sanità pubblica.

(2) A. Lanfranchi, *Sul possibile passaggio dei tripanosomi nel latte*. Rend. della R. Accademia dei Lincei Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. 1916, pag. 369.

(3) H. Velu et R. Eyraud, *Trypanosomiase de cheval du Maroc. Infestation d'un jeune chien par l'allaitement*, Bull. de la Société de Pathol. éxotique. Séance 11 octobre 1916, pag. 567.

I tripanosomi comparvero il 26, andarono gradatamente aumentando, e l'animale fu trovato morto il 30 mattina. Non fu possibile raccogliere il latte. Il 2 maggio, si trovano morti tre piccoli; la poltiglia ottenuta dal sangue, organi interni, come quella degli altri due, appositamente sacrificati, inoculata nel peritoneo dei topolini, non dà luogo all'infezione.

Ratto 2. — Ad una femmina che ha partorito quattro piccoli il 25 maggio 1914, il giorno stesso, eguale inoculazione di 1 cm³; i piccoli vengono separati.

I tripanosomi comparvero il 27, aumentarono gradatamente, il 30 mattina l'animale morì. Risultati negativi, dei diversi esami fatti sul latte, prelevato nei giorni 27 e 28.

Ratto 3. — Ad un soggetto che ha partorito sette piccoli il 21 marzo 1915, si inocula sotto cute 1 cm³ soluzione. I tripanosomi comparvero il 27, aumentarono gradatamente, l'animale morì il 4 aprile. Solo il latte, prelevato il 1 aprile, si dimostrò infettante, con l'inoculazione nel topolino.

Cavia. — Una cavia, inoculata sotto cute il 9 marzo 1914, partorì il 22 due caviotti; venne a morte il 3 aprile. Tutte le ricerche sul latte furono negative. I due caviotti non si infettarono.

Ricerche col *virus rodesiense*.

Ratto 1. — Una femmina inoculata sotto cute, il 3 marzo 1914, partorisce il 6 un solo piccolo, rispondentemente alla comparsa tripanosomi; nel pomeriggio del 9 viene a morte. Tutte le ricerche, negative.

Ratto 2. — Il giorno 11 maggio 1915, si inocula nel peritoneo con 1 cm³ soluzione, una femmina che ha partorito quattro piccoli.

I tripanosomi comparvero il 13, aumentarono fino al 18, giorno della morte. Tutte le ricerche, negative.

Cavia. — Il 12 maggio 1914, ad una cavia gravida, si è inoculato sotto la cute, 2 cm³ soluzione. Il 18 tripanosomi rarissimi, e partorisce i caviotti. L'animale viene a morte il 7 giugno. Tutte le ricerche, negative.

Ricerche col *virus* della surra.

Ratto 1. — Ad una femmina che ha partorito cinque piccoli, il 25 maggio 1914, si inocula 1 cm³ soluzione sotto la cute. I tripanosomi comparvero il 28; la mattina del 4 giugno si trova morto l'animale. Solo il latte prelevato il 31, infettò i topolini. Dei cinque nati, nessuno infetto.

Ratto 2. — Il 6 aprile 1915, inoculazione di un animale che ha partorito sei piccoli. I tripanosomi comparvero il 10; morte dell'animale il 13. Tutte le ricerche, negative.

Cavia. — Il 24 aprile 1915, una cavia gravida, si inocula sotto cute con 2 cm³ soluzione. Il giorno dopo, la cavia, partorisce tre piccoli.

I tripanosomi comparvero il 27; il 19 maggio, l'animale muore; solo il latte prelevato il 3 (tripanosomi numerosi in circolo), infettò i topolini, mediante inoculazione nel peritoneo. I caviotti non si infettarono.

Ricerche col *virus gambiense*.

Ratto 1. — Il 28 aprile 1914, ad una femmina che ha partorito cinque piccoli, si inocula nel peritoneo 1 cm³ soluzione. I tripanosomi comparvero il 4 maggio. L'animale venne a morte dopo 43 giorni. Ricerche, tutte negative.

Ratto 2. — Ad una femmina gravida, si inocula sotto la cute, 1 cm³ soluzione l'8 novembre 1914. I tripanosomi comparvero il 10, e l'animale partorì tre piccoli; venne a morte il 14. Ricerche, tutte negative.

Cavia. — Il 15 aprile 1914, ad una cavia gravida, inoculazione sotto la cute di 2 cm³ soluzione. Il 21 presenta i tripanosomi; il 22 partorisce due piccoli. Il 18 maggio morte dell'animale. Ricerche, tutte negative.

Ricerche col *virus Lanfranchi*.

Ratto 1. — Il 17 aprile 1915, ad un animale gravido, si inocula sotto la cute, 1 cm³ soluzione (*virus* 1°) (¹).

I tripanosomi comparvero il 22; il 25, l'animale partorì cinque piccoli; il 28 e mattina fu trovato morto. Ricerche, tutte negative.

Ratto 2. — Il 16 maggio 1917, ad una femmina, che ha partorito il giorno antecedente sette piccoli, si inocula sotto la cute 1 cm³ di soluzione (*virus* 1°).

I tripanosomi comparvero il 20; aumentarono gradatamente; il 24 mattina, si trova morto l'animale. Delle varie ricerche, positiva quella della prova d'inoculazione del latte del giorno 21, nel peritoneo dei topolini.

Cavia 1. — Nel pomeriggio del 29 maggio 1917, ad una cavia che nella notte ha partorito quattro piccoli; si inoculano 2 cm³ soluzione, nel peritoneo (*virus 1°*).

I tripanosomi comparvero il 13 giugno; l'animale venne a morte il 30. Ricerche, tutte negative.

Cavia 2. — Il 1° giugno 1917, ad una cavia che nella notte ha partorito quattro piccoli, si inoculano nel peritoneo 2 cm³ soluzione (*virus* 2°).

I tripanosomi comparvero l'11; il 20 mattina si trova morto l'animale. Ricerche sul latte, tutte negative. Il 24 però, si trova morto un caviotto; l'inoculazione nei ratti, del materiale ottenuto riducendo in poltiglia, sangue, organi interni, diede esito positivo. Il 1° luglio, vennero a morte altri due caviotti, ma per ragioni indipendenti dalla volontà, non si poterono eseguire ricerche di controllo per stabilire la causa della morte. Il quarto caviotto, non si presentò mai infetto.

Gatto. — Il 19 marzo 1917, ad una gatta, che ha partorito un piccolo da alcuni giorni, si inoculano nel peritoneo, 2 cm³ di soluzione tipo (*virus* 1°). Temperatura precedente l'iniezione, 38,3.

(¹) Chiamo *virus* 1° quello che fu isolato nel 1912 dal prof. Mesnil, quando mi trovavo degente all'Ospedale Pasteur; *virus* 2° quello che io isolai sul finire del 1914, in occasione di una grave ricaduta.

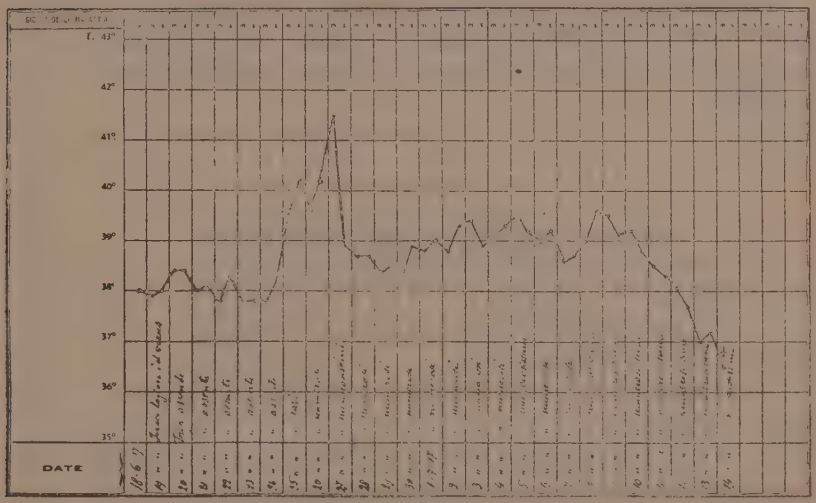
Il 20, tripanosomi assenti, temp. 39; il 21, tripanosomi rarissimi, temp. 39,2; il 22 tripanosomi rari, temp. 39,5; il 23, tripanosomi rarissimi, temp. 39; il 24, tripanosomi assenti, temp. 38,8; viene a morte il gattino; il 25, tripanosomi assenti, temp. 39.

La gatta è divenuta tanto cattiva, che non è più possibile esaminarla. Ricerche fatte sul latte, prelevato nei giorni 21, 22 e 23, negative. Il giorno 24, l'animale non aveva più latte.

Risultati della inoculazione, nel peritoneo dei ratti, della poltiglia; sangue, organi interni del gattino, negativi.

La gattina venne a morte il 2 aprile, e le ricerche di controllo dimostrarono come essa fosse infetta.

Cavallo. — Il 19 giugno 1917, si inoculano, sotto la cute, 5 cm^3 *virus* 2°, ad una cavalla baia, fuori d'età, in scadenti condizioni di nutrizione, detto animale, pur non sapendosi quando abbia partorito, nè da quando abbia cessato di allattare il puledro, presenta secrezione lattea, in discreta quantità.



I parassiti comparvero in circolo il giorno 25, si mantennero costanti fino alla morte dell'animale. Per il loro quantitativo in circolo e per l'andamento della temperatura (vedi figura).

Per quanto, fino dal giorno 26, la secrezione lattea andasse diminuendo, pure fu possibile compiere le dovute ricerche, fino all'11 luglio.

I tripanosomi furono rilevabili, rarissimi, all'esame microscopico, solo nei giorni 27 giugno e 1 luglio.

Dei ratti si infettarono quelli, inoculati nei giorni 27, 28, 29 e 30 giugno; 6, 7 e 11 luglio.

***

Dall'esame dei risultati ottenuti si rileva, come per tre dei *virus* adoperati (*Brucey*, *Evansi*, *Lanfranchii*) si è dimostrata la possibilità del loro passaggio nel latte.

Per il solo *virus Lanfranchii*, si è verificata, in una cavia, la possibilità della infezione dei piccoli lasciati alla mammella.

Per lo stesso *virus*, si è dimostrata, nel cavallo, la possibilità della messa in evidenza dei tripanosomi, con l'esame diretto del latte al microscopio.

In tutti gli altri casi, la dimostrazione dei tripanosomi, è dovuta alla inoculazione del latte in animali di prova.

Avuto riguardo alle diverse specie di animali, tale possibilità esiste: sui ratti, per i *virus Brucey*, *Evansi*, *Lanfranchii*; nelle cavie, per i *virus Evansi* e *Lanfranchii*; per quest'ultimo *virus*, unico esperimentato anche nel cavallo.

Di fronte al valore dei risultati positivi, molto relativo è — in senso lato — quello dei risultati negativi, in quanto non si può escludere che esperimenti eseguiti su di un maggior numero di animali, potessero portare a risultati diversi.

CONCLUDENDO:

Dai risultati delle presenti ricerche resta dimostrato:

a) come sia possibile il passaggio, nel latte dei ratti, dei tripanosomi *Brucey*, *Evansi*, *Lanfranchii*;

b) come sia possibile il passaggio, nel latte delle cavie, dei tripanosomi *Evansi* e *Lanfranchii*;

c) come sia possibile il passaggio, nel latte dei cavalli, del tripanosoma *Lanfranchii*;

d) come sia possibile, per il *virus Lanfranchii*, trasmettere l'infezione ai neonati delle cavie, mediante l'allattamento.

***

Per le speciali condizioni di alcuni degli animali, adoperati nelle presenti ricerche, viene, ancora una volta, confermato il fatto, si può dire unanimemente ammesso, che i tripanosomi in genere, non passano dalla madre al feto.

Laveran e Mesnil, Chaüssat, Lewis, Lingard, Rabinowtch e Kemper; hanno ciò rilevato per il *Lewisi*; Massaglia per il tripanosoma *Brucey* e

Evansi; Nattan e Larrier per l'*Evansi*, *Brucey*, *congolense*, *soudanense* e *gambiense*.

Il solo esempio di passaggio dalla madre al feto, riportato da Sivori e Leclerc, in una cavia, nata da madre infetta di *caderas*, che mostrò, fin dalla nascita, dei tripanosomi nel sangue, ha un valore molto relativo, poichè con ragione, fa osservare il Mesnil, come l'utero della madre contenesse un feto morto.

Meccanica. — *Sopra il movimento di rotazione diurna della Terra*. Nota II di A. Antoniazzi, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Equazioni del movimento e loro integrazione.

Il sistema di coordinate, rispetto al quale abbiamo determinato il momento delle forze, ha l'asse z in coincidenza con l'asse di figura della Terra e il piano zy passante per il punto S_1^1, perciò l'orientamento di questo piano è dato dalla ascensione retta α dell'astro, contata a partire da un punto fisso dell'equatore, e il detto piano ruota intorno all'asse z con velocità data da $\frac{d\alpha}{dt}$. Se dunque si indicano con $p\,q\,n$ le velocità di rotazione della Terra intorno agli assi, saranno $p\,q\,\frac{d\alpha}{dt}$ le velocità di rotazione del sistema di assi. Pertanto le equazioni (3) divengono

$$(4)\qquad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} + \left(Cn - A\frac{d\alpha}{dt}\right)q = P \\ A\frac{dq}{dt} - \left(Cn - A\frac{d\alpha}{dt}\right)p = 0 \\ C\frac{dn}{dt} = 0. \end{cases}$$

La terza dà

$$n = \text{costante}.$$

Per integrare le due prime equazioni si ponga da prima $P = 0$ e si sostituiscano in luogo degli assi $x\,y$ gli altri due assi $x_1 y_1$ fissi nel piano dell'equatore, dirigendo l'asse x_1 al punto di origine delle ascensioni rette. Se si indicano con $p_1 q_1$ le velocità di rotazione intorno agli assi $x_1 y_1$, dalle (4) si deducono le equazioni

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{C}{A}\,n\,q_1 = 0 \qquad \frac{dq_1}{dt} - \frac{C}{A}\,n\,p_1 = 0$$

dalle quali

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{C^2}{A^2} n^2 q_1 = 0$$

che si integra in maniera nota e dà

$$q_1 = n_1 \operatorname{sen} \frac{C}{A} n t + n_2 \cos \frac{C}{A} n t$$

essendo n_1 ed n_2 due costanti d'integrazione. Risulta poi

$$p_1 = n_1 \cos \frac{C}{A} n t - n_2 \operatorname{sen} \frac{C}{A} n t .$$

Per passare da questi valori ai valori cercati $p\,q$ basta notare che gli assi $x\,y$ sono ruotati rispetto ad $x_1\,y_1$, nel verso positivo, dell'angolo α, perciò sarà

$$p = p_1 \cos \alpha + q_1 \operatorname{sen} \alpha$$
$$q = q_1 \cos \alpha - p_1 \operatorname{sen} \alpha .$$

Per conseguenza, posto

(5) $$\frac{C}{A} n t - \alpha = \tau$$

risulta

(6) $$\begin{cases} p = n_1 \cos \tau - n_2 \operatorname{sen} \tau \\ q = n_1 \operatorname{sen} \tau + n_2 \cos \tau \end{cases}$$

e si verifica che queste due espressioni costituiscono un integrale completo delle due prime equazioni differenziali (4) nelle quali sia supposto $P = 0$. Il metodo della variazione delle costanti arbitrarie ci darà l'integrale nella ipotesi che P sia funzione di t non sempre nulla. Se nelle due prime equazioni (4) si sostituiscono i valori di p e q dati dalle (6), nelle quali si ritengano $n_1\,n_2$ funzioni del tempo, risulta

$$\frac{dn_1}{dt} \cos \tau - \frac{dn_2}{dt} \operatorname{sen} \tau = \frac{P}{A}$$
$$\frac{dn_1}{dt} \operatorname{sen} \tau + \frac{dn_2}{dt} \cos \tau = 0$$

da cui

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{P}{A} \cos \tau \qquad \frac{dn_2}{dt} = -\frac{P}{A} \operatorname{sen} \tau .$$

Rimesso in luogo di τ il suo valore (5), se si sviluppano seno e coseno e si integra per parti considerando $\frac{P}{A} \cos \alpha$ e rispettivamente $\frac{P}{A} \operatorname{sen} \alpha$

come fattore finito, si trova

$$n_1 = \frac{P}{Cn}\operatorname{sen}\tau - \frac{1}{Cn}\int \operatorname{sen}\frac{C}{A}nt\,\frac{d(P\cos\alpha)}{dt}\,dt + \\ + \frac{1}{Cn}\int \cos\frac{C}{A}nt\,\frac{d(P\operatorname{sen}\alpha)}{dt}\,dt + h_1$$

$$n_2 = \frac{P}{Cn}\cos\tau - \frac{1}{Cn}\int \cos\frac{C}{A}nt\,\frac{d(P\cos\alpha)}{dt}\,dt - \\ - \frac{1}{Cn}\int \operatorname{sen}\frac{C}{A}nt\,\frac{d(P\operatorname{sen}\alpha)}{dt}\,dt + h_2$$

essendo $h_1\,h_2$ due costanti d'integrazione.

È facile convincersi fin d'ora che i quattro integrali dei secondi membri portano soltanto piccoli termini di correzione. Si noti anzitutto che tenuto conto della espressione trovata per P (Nota I) può porsi

$$\frac{P}{Cn} = \varkappa\frac{a^3}{r^3}\operatorname{sen} 2\delta\,, \tag{7}$$

essendo $\varkappa$ una costante, a il semigrand'asse dell'orbita, r la distanza geocentrica e δ la declinazione dell'astro. Pertanto, le due quantità $P\cos\alpha$, $P\operatorname{sen}\alpha$ dipendono soltanto dalla posizione del punto S e possono esprimersi in funzione degli elementi dell'orbita di quel punto e del tempo, perciò le derivate di quelle due quantità sono somme di termini, ciascuno dei quali contiene un fattore, che sarà o il moto del corpo nella sua orbita o la variazione di un elemento dell'orbita. Nella successiva integrazione comparirà invece un divisore dell'ordine di grandezza di n cioè della velocità della rotazione diurna della Terra, e quindi assai più grande del corrispondente moltiplicatore. Per questo motivo è lecito semplificare il calcolo dei quattro integrali supponendo (soltanto per il detto calcolo) che il punto S si muova intorno alla Terra su un'orbita circolare per cui rimangono costanti il moto geocentrico μ sull'orbita e la distanza geocentrica $r = a$, nel quale caso il secondo membro della (7) si riduce al prodotto $\varkappa\operatorname{sen} 2\delta$.

Introducendo quest'ultima espressione nei quattro integrali, compariranno insieme la declinazione vera attuale δ dell'astro [1] e la differenza α di ascensione retta contata a partire da un punto fisso dell'equatore. Se, per uniformità, anche per α si vuol porre la vera ascensione retta attuale dell'astro, si dovrà allora al $\frac{d\alpha}{dt}$ togliere la variazione dipendente dalla pre-

[1] La deviazione dell'asse istantaneo di rotazione dall'asse d'inerzia è affatto trascurabile per quanto riguarda la misura di δ.

cessione p_α in ascensione retta, per cui, ad esempio, in luogo del primo integrale si avrebbe

$$\int \operatorname{sen} \frac{C}{A} n t \frac{d(P \cos \alpha)}{dt} dt + \int \operatorname{sen} \frac{C}{A} n t . P \operatorname{sen} \alpha \frac{dp_\alpha}{dt} .$$

Ma è da notare che la precessione in ascensione retta è di 46″, il moto corrispondente diviso (in seguito all'integrazione) per una quantità dell'ordine di grandezza di n porta un fattore così piccolo da rendere assolutamente trascurabile l'ultimo integrale, per cui nelle espressioni di n_1 e di n_2 possiamo ritenere che α e δ rappresentino l'ascensione retta e la declinazione attuali dell'astro.

Possiamo dunque assumere come elementi di riferimento l'eclittica e l'equinozio attuali e allora, essendo ε l'obliquità dell'eclittica, $\lambda\beta$ la longitudine e la latitudine dell'astro, avremo

$$(8) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \beta \cos \varepsilon + \cos \beta \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \lambda \\ \cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \delta \operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \varepsilon + \cos \beta \cos \varepsilon \operatorname{sen} \lambda . \end{cases}$$

Indichiamo ancora con l la longitudine dell'astro nella sua orbita, con Ω la longitudine del nodo, con i la inclinazione dell'orbita sulla eclittica e allora, considerando il triangolo formato dai circoli massimi dell'eclittica e dell'orbita e dal circolo di latitudine dell'astro si ha

$$(9) \quad \begin{cases} \cos (l - \Omega) = \cos \beta \cos (\lambda - \Omega) \\ \operatorname{sen} (l - \Omega) \cos i = \cos \beta \operatorname{sen} (\lambda - \Omega) \\ \operatorname{sen} (l - \Omega) \operatorname{sen} i = \operatorname{sen} \beta \end{cases}$$

dalle quali si ricava (sommando le due prime moltiplicate rispettivamente per $\cos \Omega$ e per $-\operatorname{sen} \Omega$, ecc.)

$$\begin{aligned} \cos \beta \cos \lambda &= \cos (l - \Omega) \cos \Omega - \operatorname{sen} (l - \Omega) \operatorname{sen} \Omega \cos i \\ \cos \beta \operatorname{sen} \lambda &= \cos (l - \Omega) \operatorname{sen} \Omega + \operatorname{sen} (l - \Omega) \cos \Omega \cos i \\ \operatorname{sen} \beta &= \operatorname{sen} (l - \Omega) \operatorname{sen} i . \end{aligned}$$

Combinando queste espressioni con le (8) potremo osservare che, avendo trascurata l'eccentricità dell'orbita (nel caso della Luna questa è circa 0,05), è ragionevole trascurare anche i prodotti $\operatorname{sen} i \operatorname{sen} \varepsilon$, $\operatorname{sen} i \cos \varepsilon$ (per la Luna $\operatorname{sen} i = 0{,}08$ circa) e allora (posto $\cos i = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i$) risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \delta &= \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} l + \cdots \\ \cos \delta \cos \alpha &= \cos l + \cdots \\ \cos \delta \operatorname{sen} \alpha &= \cos \varepsilon \operatorname{sen} l + \cdots \end{aligned}$$

e per conseguenza

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\delta \cos \alpha &= \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} 2l + \cdots \\ \operatorname{sen} 2\delta \operatorname{sen} \alpha &= \operatorname{sen} \varepsilon \cos \varepsilon (1 - \cos 2l) + \cdots \end{aligned}$$

I secondi membri di queste equazioni vanno sostituiti nei quattro integrali che entrano a comporre le espressioni di n_1 ed n_2, mentre per i primi termini di quelle espressioni si dovrà tener conto della (7). A integrazioni eseguite risulta

$$n_1 = \varkappa \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \operatorname{sen} \tau + \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n - 2\mu} \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\left(\frac{C}{A}nt - 2l\right) +$$

$$+ \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n + 2\mu} \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\left(\frac{C}{A}nt + 2l\right) + \cdots + h_1$$

$$n_2 = \varkappa \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \cos \tau - \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n - 2\mu} \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{C}{A}nt - 2l\right) -$$

$$- \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n + 2\mu} \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{C}{A}nt + 2l\right) + \cdots + h_2,$$

e quindi dalle (6)

$$(10)\quad \begin{cases} q = \varkappa \dfrac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta + \dfrac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n - 2\mu} \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}(2l - \alpha) \\ \qquad - \dfrac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n + 2\mu} \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}(2l + \alpha) + \cdots + h \operatorname{sen}(H + \tau) \\ p = \qquad \dfrac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n - 2\mu} \cos^2\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos(2l - \alpha) \\ \qquad + \dfrac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n + 2\mu} \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos(2l + \alpha) + \cdots + h \cos(H + \tau) \end{cases}$$

essendo h, H due nuove costanti che sostituiscono le precedenti $h_1 h_2$.

Il primo termine della espressione di q dà origine alle formule di Precessione e Nutazione generalmente adottate; tutti gli altri termini sono così piccoli da non alterare sensibilmente le dette formule. Ma dalle espressioni complete di p e q risultano definiti i piccolissimi movimenti periodici dell'asse istantaneo di rotazione, poichè, come è noto, la posizione del detto asse rispetto al triedro di riferimento è determinata dalle quantità p, q, n. Giova però ricordare che questi movimenti periodici sono riferiti ad assi mobili rispetto alla massa terrestre, per cui il vero movimento dell'asse istantaneo di rotazione nell'interno della Terra risulta dalla combinazione di tutti i movimenti periodici dell'asse medesimo rispetto al triedro di riferimento e del movimento di questo rispetto alla massa terrestre.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

F. P. Cantelli, *Sullo schema lexiano della dispersione ipernormale.* Pres. dal Corrisp. Castelnuovo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà il triste annuncio della morte del Corrispondente prof. Giovanni Di Stefano, Ordinario di Geologia nella R. Università di Palermo, avvenuta il 3 gennaio corr. Apparteneva il defunto all'Accademia per la *Geologia* e *Paleontologia*, sino dal 15 luglio 1904.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich, nel presentare le pubblicazioni giunte in dono, segnala tre opuscoli di patologia vegetale del Corrisp. F. Silvestri. Ricorda inoltre l'opuscolo del prof. Antonio Favaro sugli *Amici e Corrispondenti del Galilei*, il 40mo ed ultimo, riguardante Giuseppe Moletti, e in questa occasione accenna ai meriti dell'infaticabile illustratore della letteratura Galileiana; da ultimo presenta il 22mo fascicolo (1909-1914) degli *Studi e Ricerche* dell'Istituto di Chimica agraria della R. Università di Pisa.

CONCORSI A PREMI

Elenco dei concorrenti al premio Reale per la *Chimica*
(Scadenza 31 dicembre 1917. — Premio di L. 10.000).

1. Parravano Nicola. 1) « Ricerche teoriche e sperimentali sulle leghe metalliche 1909-1918 » (N. 38 opuscoli) (st.).

2. Ponzio Giacomo. 1) « Pubblicazioni di chimica organica 1905-1917 ». (N. 50 opuscoli) (st.).

COMUNICAZIONI VARIE

Il Socio Ricci-Curbastro, trovandosi oggi presente alla seduta, prende occasione dalla lettura del processo verbale, nella sua qualità di Presidente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, per ringraziare l'Accademia della ospitalità che ha voluto dare all'Istituto predetto; si augura che la lontananza dell'Istituto dalla sua sede naturale non abbia che breve durata, e rileva come l'atto cortese ed affettuoso dell'Accademia dei Lincei, non fa che stringere più e meglio i vincoli di colleganza scientifica fra i due sodalizi.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA

presentate nella seduta del 6 gennaio 1918.

Azzini F. — Rocce basaltiche del Vicentino presso Valdagno (Estr. dagli « Atti della Società toscana di Scienze naturali », vol. XXXII, pp. 1-34). Pisa, 1917. 8°.

Favaro A. — Amici e Corrispondenti d Galileo Galilei (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto veneto di scienze, lettere ed arti », vol. LXXVII, pp. 1-118). Venezia, 1918. 8°.

Silvestri F. — Contributo alla conoscenza del Celiode del nocciuolo (*Coeliodes ruber* Marsh: *Coleoptera, Curculionidae*). (Estr. dal « Bollettino del laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore di agricoltura in Portici », volume XII, pp. 156-174). Portici, 1917. 8°.

Silvestri F. — Sulla *Lonchaea aristella* Beck. (Diptera: *Lonchaeidae*) dannosa alle infiorescenze del caprifico e del fico (Estr. dal « Bollettino del laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. XII, pp. 123-146). Portici, 1917. 8°.

Silvestri F. — Descrizione di una specie di Oscinosoma (Diptera: *Chloropidae*) osservato in fruttescenze di caprifico (Estr. dal « Bollettino del laboratorio di Zoologia generale ed agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. XII, pp. 147-154). Portici, 1917. 8°.

Studi e Ricerche di Chimica agraria (Istituto di chimica agraria della R. Università di Pisa), fasc. 22. Modena, 1917. 8°, pp. 1-503.